

On revient sur le problème d'évolution quasi-statique discrétisé en temps:

$$0 = t_0^m < t_1^m < \dots < t_{n_m}^m = T$$

Hypothèses.

- $\Omega \in C^2$ (il faut pouvoir définir $u|_{\Gamma}$, n comme élément de $H^{1/2}$ et les sauts de n posent une difficulté - surmontable).

- $F \in AC([0, T]; L^N(\Omega; \mathbb{R}^N))$
 $T \in AC([0, T]; L^\infty(\Gamma; \mathbb{R}^N))$
 $U \in AC([0, T]; H^{1/2}(\Gamma_0; \mathbb{R}^N))$

- $\kappa = K_D + \mathbb{R} \mathbb{I} \quad K_D \subset M_D^{N \times N}$
fermé.

$$\{ \tau_D \mid |\tau_D| \leq R_\kappa \} \subset K_D \subset \{ \tau_D \mid |\tau_D| \leq R_\kappa \}$$

- Condition de charge pure uniforme:

$$\exists \rho \in AC([0, T]; L^2(\Omega, M_D^{N \times N})), \exists \alpha > 0 \quad \forall u$$

- $\forall t, x \quad \forall \tau \in M_D^{N \times N} \text{ avec } |\tau| \leq \alpha, \quad \rho(t, x) + \tau \in \kappa$

- $\forall t, x \quad \forall u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad \int_\Omega \rho : \varepsilon(u) = \int_\Omega F \cdot u + \int_{\Gamma} T \cdot u$
 $u|_{\Gamma_0} = 0$

- $\rho_D \in AC([0, T]; L^\infty(\Omega; M_D^{N \times N}))$

- Condition initiale $\sigma_0, u_0, e_0, \rho_0$ qui satisfait toutes les éq. du problème (avec $F(0), T(0), U(0)$)

excepté la loi d'écoulement.

On rappelle que $AC([0, T]; B)$ désigne l'ensemble des fonctions $f: [0, T] \rightarrow B$ absolument continues, c'est-à-dire

$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0$ tq pour toute suite $[a_n, b_n]$ d'intervalles d'intérieurs disjoints :

$$\sum_{n \geq 0} (b_n - a_n) < \eta \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \|f(b_n) - f(a_n)\|_B < \varepsilon$$

Les fonctions absolument continues sont à la fois continues et BV.

$$\text{On pose : } F_i^m = F(t_i^m) \quad T_i^m = T(t_i^m) \quad U_i^m = U(t_i^m)$$

$$\sigma_0^m = \sigma_0 \quad u_0^m = u_0 \quad p_0^m = p_0 \quad e_0^m = e_0$$

puis on cherche à résoudre inductivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \sigma_i^m + F_i^m = 0 \\ \varepsilon(u_i^m) = e_i^m + p_i^m \\ \sigma_i^m = \mathbb{1} \wedge e_i^m \\ \sigma_i^m \in K \quad \text{et} \quad p_i^m - p_{i-1}^m \in \partial I_K[\sigma_i^m] \\ \sigma_i^m|_M = T_i^m \quad \text{sur} \quad \Gamma_T \\ u_i^m = U_i^m \quad \text{sur} \quad \Gamma_U \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega$$

en partant de la condition initiale donnée en $i = 0$.

On a vu à la séance précédente que, étant donné $u_{i-1}, e_{i-1}, p_{i-1}$, toute solution $(u_i, e_i, p_i) \in H^1 \times L^2 \times L^2$ à l'instant suivant de la discrétisation minimise :

$$\mathcal{E}^p(u, e, p) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} e : M e + \int_{\Omega} H_x(p - p_{i-1}) - \int_{\Omega} F \cdot u - \int_{\Gamma} T \cdot u$$

$$\text{sur } \mathcal{CA}(U) = \left\{ (e, p, u) \mid \begin{array}{l} e, p \in L^2(\Omega; H_D^{N \times N}) \quad u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \\ e + p = \varepsilon(u) \quad \text{et} \quad u|_{\Gamma_0} = U \end{array} \right\}$$

Mais, on a aussi vu qu'il existait un problème de minimisation pour u seulement et qu'il devait être relaxé dans BD et que la condition à la limite en déplacement devait elle aussi être relaxée.

Cela conduit à rechercher p dans $\mathcal{M}_\mu(\Omega \cup \Gamma_0; H_D^{N \times N})$ et à poser :

$$\overline{\mathcal{CA}}(U) := \left\{ (e, u, p) \mid \begin{array}{l} e \in L^2(\Omega; H_D^{N \times N}), \quad u \in \text{BD}(\Omega) \text{ et} \\ p \in \mathcal{M}_\mu(\Omega \cup \Gamma_0; H_D^{N \times N}) \quad \forall \mu: \end{array} \right.$$

$$\bullet \quad \varepsilon(u) = e + p$$

$$\bullet \quad p \llcorner \Gamma_0 = (U - u) \otimes n \in \mathcal{H}^{N \times 1} \llcorner \Gamma_0 \left. \right\}$$

La condition à la limite cinématique est reformulée en terme de p . Parce que p est déviatorique, elle entraîne :

$$m \cdot u|_{\Gamma_0} = m \cdot U$$

On étend la fonction $p \rightarrow \int_{\Omega} H_K(p) d\mathcal{L}^N$ de $L^2(\Omega; H_0^{n,n})$ à $M_b(\Omega \cup \Gamma_0; H_0^{n,n})$ en utilisant la dérivée de Radon-Nikodym $dp/d|p|$ (qui est une fonction) :

$$\int_{\Omega \cup \Gamma_0} H_K\left(\frac{dp}{d|p|}\right) d|p|$$

En effet, dans le cas $p \in L^2$, la mesure associée s'écrit $p \mathcal{L}^N$ et $|p| = |p| \mathcal{L}^N$

$\nearrow$ mesure de variation totale de p $\nwarrow$ norme de la matrice $p(x)$

Pour presque tout $x \in \Omega$ tel que $p(x) \neq 0$, on a :

$$\frac{dp}{d|p|} = \frac{1}{|p(x)|} p(x)$$

et donc, rappelant que H_K est positivement homogène de degré 1 :

$$\int_{\Omega \cup \Gamma_0} H_K\left(\frac{dp}{d|p|}\right) d|p| = \int_{\Omega} H_K(p(x)) d\mathcal{L}^N$$

L'analyse menée lors de la séance précédente s'adapte alors au nouveau problème de minimisation et donne :

THEOREME [Dal Maso et al.]

Soit $p_{i-1} \in M_b(\Omega \cup \Gamma_U; H_D^{N \times N})$, $U_i^m \in H^1(\Gamma_U; \mathbb{R}^N)$,
 $F_i^m \in L^N(\Omega; \mathbb{R}^N)$, $T_i^m \in L^\infty(\Gamma_T; \mathbb{R}^N)$.

On suppose la condition de charge pure (uniforme), satisfaite.

Alors, le problème de minimum :

$$\min_{(u, e, p) \in \overline{CA}(U_i)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} e : M e + \int_{\Omega \cup \Gamma_U} H_K \left(\frac{d(p - p_{i-1})}{d|p - p_{i-1}|} \right) d|p - p_{i-1}| - \int_{\Omega} F \cdot u - \int_{\Gamma_T} T \cdot u$$

a au moins un minimiseur $(u_i^m, e_i^m, p_i^m) \in \overline{CA}(U_i^m)$.

Cela permet de définir des "approximations" constantes par morceaux de solution :

$$u^m(t) := \begin{cases} u_{i-1}^m & \text{si } t \in [t_{i-1}^m, t_i^m[\\ u_{p_m}^m & \text{si } t : T \end{cases} \quad \text{et idem } e^m(t), p^m(t).$$

Il reste à passer à la limite $\max_i |t_i^m - t_{i-1}^m| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$
pour obtenir l'existence d'une évolution en temps continu.

Une difficulté essentielle est qu'on a une formulation variationnelle pour le problème discrétisé en temps, mais pas pour le problème en temps continu.

On va donc commencer par écrire une formulation

énergétique du problème en temps continu. On suit Dal Maso et al. qui adaptent des idées de:

A. MAINIK & A. MIELKE (2005): Existence results for energetic models for rate-independent systems.

Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 22, 73-99.

Une remarque essentielle pour passer de la formulation variationnelle en temps discret à celle en temps continu est que :

$$(u_i^{\wedge}, e_i^{\wedge}, p_i^{\wedge}) = \arg \min_{(u, e, p) \in \overline{CA}(U_i^{\wedge})} \frac{1}{2} \int_{\Omega} e : \mathbb{M} e + \mathcal{H}_K(p - p_{i-1}) - \int_{\Omega} \tilde{F}_i^{\wedge} u - \int_{\Gamma_f} \tilde{T}_i^{\wedge} u$$

$$\Downarrow$$

$$(u_i^{\wedge}, e_i^{\wedge}, p_i^{\wedge}) = \arg \min_{(u, e, p) \in \overline{CA}(U_i^{\wedge})} \frac{1}{2} \int_{\Omega} e : \mathbb{M} e + \mathcal{H}_K(p - p_i) - \int_{\Omega} \tilde{F}_i^{\wedge} u - \int_{\Gamma_f} \tilde{T}_i^{\wedge} u$$

où on a posé $\mathcal{H}_K(p) := \int_{\Omega \cup \Gamma_D} H_K\left(\frac{dp}{d|p|}\right) d|p|$

PREUVE. Comme H_K vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall p, p_i, p_{i+1} \in H_D^{N \times N}, \quad H_K(p - p_{i+1}) \leq H_K(p - p_i) + H_K(p_i - p_{i+1})$$

On en déduit :

$$\forall p, p_i, p_{i+1} \in L^2(\Omega; H_0^{N \times N}),$$

$$\mathcal{H}_K(p - p_{i+1}) \leq \mathcal{H}_K(p - p_i) + \mathcal{H}_K(p_i - p_{i+1})$$

Pour $p, p_i, p_{i+1} \in \mathcal{M}_e(\Omega \cup \Gamma_D; H_0^{N \times N})$, il existe des suites p^l, p_i^l, p_{i+1}^l dans $L^2(\Omega; H_0^{N \times N})$ convergeant faiblement étoile dans $\mathcal{M}_e$ vers p, p_i, p_{i+1} . Par la semi-continuité inférieure faiblement étoile de $\mathcal{H}_K$ (c'est cette semi-continuité inférieure faiblement étoile sur laquelle s'est basée la définition de l'extension de $\mathcal{H}_K$ aux mesures), on obtient:

$$\forall p, p_i, p_{i+1} \in \mathcal{M}_e(\Omega \cup \Gamma_D; H_0^{N \times N}),$$

$$\mathcal{H}_K(p - p_{i+1}) \leq \mathcal{H}_K(p - p_i) + \mathcal{H}_K(p_i - p_{i+1})$$

Par hypothèse, on a:

$$\forall (u, e, p) \in \overline{CA}(U^m),$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{e}_i : \mathbb{M} \tilde{e}_i + \mathcal{H}_K(\tilde{p}_i - \tilde{p}_{i+1}) - \int_{\Omega} \tilde{r}_i^m \cdot u_i^m - \int_{\Omega} \tilde{\tau}_i^m \cdot u_i^m$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} e : \mathbb{M} e + \mathcal{H}_K(p - p_{i+1}) - \int_{\Omega} r_i^m \cdot u - \int_{\Omega} \tau_i^m \cdot u$$

Appliquant l'inégalité triangulaire à $\mathcal{H}_K(p - p_{i+1})$ et simplifiant les deux membres de l'inégalité par $\mathcal{H}_K(p_i - p_{i+1})$, on obtient le résultat. $\square$

On doit donc s'attendre à ce que l'évolution $(u(t), e(t), p(t))$ satisfasse :

(q01) stabilité globale :

$$\forall t \in [0, T] \quad (u(t), e(t), p(t)) \in \overline{CA}(U(t))$$

$$\forall (v, \eta, q) \in \overline{CA}(U(t))$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} e(t) : \mathbb{M} e(t) - \int_{\Omega} F(t) \cdot u(t) - \int_{\Gamma_T} T(t) \cdot u(t)$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} q : \mathbb{M} q + \int_{\Omega} \mathcal{H}_K(q - p(t)) - \int_{\Omega} F(t) \cdot v - \int_{\Gamma_T} T(t) \cdot v$$

Mais, il faut la compléter par autre chose, car l'implication entre les problèmes de minimum associés à p_{i+1} et p_i n'est pas une équivalence (il n'y a plus p_{i+1} dans le deuxième).

En suivant Mainik & Mielke repris par Dal Maso et al. en plasticité, on introduit une "distance de dissipation" définie en copiant la définition de la variation :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}_K}(P; [0, t]) := \sup \sum_{i=0}^m \mathcal{H}_K(p(t_i) - p(t_{i-1}))$$

où le supremum est pris sur toutes subdivisions

$$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq T$$

Cela permet de compléter la stabilité globale par une équation de bilan d'énergie :

(qs2) bilan d'énergie :

$$\begin{aligned}
 \forall t \in [0, T] \quad & \frac{1}{2} \int_{\Omega} e(t) : \Lambda e(t) + \mathcal{D}_{H^1_K} (p; [0, t]) - \int_{\Omega} F(t) u(t) - \int_{\Gamma_T} T(t) u(t) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} e(0) : \Lambda e(0) - \int_{\Omega} F(0) \cdot u(0) - \int_{\Gamma_T} T(0) \cdot u(0) + \int_0^t \left(\int_{\Omega} e(s) : \Lambda \dot{e}(s) \right. \\
 & \quad \left. - \int_{\Omega} F(s) \cdot \dot{u}(s) - \int_{\Gamma_T} T(s) \cdot \dot{u}(s) \right) ds - \int_{\Gamma_T} \dot{T}(s) \cdot u(s) \Big|_0^t
 \end{aligned}$$

où on a introduit la solution $U(s)$ du problème élastique :

$$\begin{cases}
 \operatorname{div} \Lambda \varepsilon(U(s)) = 0 & \text{dans } \Omega \\
 \Lambda \varepsilon(U(s)) \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_T \\
 U|_{\Gamma_U}(s) = U(s) & \text{sur } \Gamma_U
 \end{cases}$$

pour éviter d'écrire $\langle \sigma(s) \cdot n, \dot{U}(s) \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$

(ce qu'on aurait pu faire en s'appuyant sur la séance 1).

On peut alors procéder comme pour le processus de rafle.

- Obtenir des estimations uniformes en vue d'appliquer le théorème de Helly.
- Passer à la limite dans la formulation invariante et montrer que la limite des approximations (u^m, e^m, p^m) satisfait (qs1) et (qs2).

Il y aura une dernière étape à ajouter :

- Faire le lien entre les "solutions énergétiques" $(u(t), e(t), p(t))$ satisfaisant (qs1) et (qs2) avec les équations formelles de départ.

PROPOSITION [Dal Maso et al.]

On fait toutes les hypothèses énoncées au début de cette séance. Alors :

$$\forall t \quad \|u^m(t)\|_{BD} + \|e^m(t)\|_{L^2} + \|p^m(t)\|_{M_t(\mathcal{R} \cup \mathcal{V})} \leq C$$

$$\text{var}(p^m; [0, T]) \leq C$$

où C est une constante qui ne dépend que de M, α, ρ (condition de charge sure), ϵ_0, U .

Le théorème de Helly permet alors d'extraire une sous-suite telle que :

$$\forall t \in [0, T], \quad \rho^n(t) \xrightarrow{*} \rho(t) \text{ dans } w^*-M_0^*(\mathbb{R}V_0^0; H_D^{n,n})$$

avec $\rho \in BV([0, T]; M_{\epsilon})$

Fixons $\epsilon \in [0, T]$. Comme

$$\|e^n(t)\|_{L^2} + \|u^n(t)\|_{BD} \leq C$$

On peut extraire des sous-suites $e^{p(n)}(t)$ et $u^{p(n)}(t)$ (dépendant de ϵ !) telles que :

$$\begin{aligned} e^{p(n)}(t) &\rightarrow e(t) && \text{dans } w-L^2 \\ u^{p(n)}(t) &\xrightarrow{*} u(t) && \text{dans } w^*-BD. \end{aligned}$$

Comme Dal Maso et al. ont montré que :

- $\overline{CA}(U)$ est fermé dans $w^*-BD \times w-L^2 \times w^*-M_{\epsilon}$

- Le problème de minimum (qs1) est stable

$$\begin{aligned} \text{sous convergence} \quad e^{p(n)} &\rightarrow e && w-L^2 \\ u^{p(n)} &\xrightarrow{*} u && w^*-BD \\ \rho^{p(n)} &\rightarrow \rho && w^*-M_{\epsilon} \end{aligned}$$

- Si p est donné, e et u satisfaisant (qs 1) sont uniques.

IP en résulte que :

$$e^m(t) \rightarrow e(t)$$

$$u^m(t) \rightarrow u(t)$$

sans avoir besoin d'extraire de sous-suite.

Au final, cela donne :

PROPOSITION [Dal Maso et al.]

IP existe une sous-suite extraite de (u^m, e^m, p^m) telle que :

$$\forall t \in [0, T] \quad \left| \begin{array}{ll} u^m(t) \xrightarrow{*} u(t) & w^s\text{-}BD \\ e^m(t) \rightarrow e(t) & w\text{-}L^2 \\ p^m(t) \xrightarrow{*} p(t) & w^s\text{-}\mathcal{M}_b \end{array} \right.$$

avec en outre $p \in BV([0, T]; \mathcal{M}_b(\Omega \cup \Gamma; \mathbb{M}_0^{N \times N}))$.

Pour chaque $t \in [0, T]$, $(u(t), e(t), p(t))$ satisfait (qs 1).

Dal Maso et al. montrent ensuite que $u(t), e(t), p(t)$ satisfont aussi le bilan d'énergie (qs 2) et que

la convergence de $e^n(t)$ vers $e(t)$ est, en fait, forte :

$$e^n(t) \rightarrow e(t) \quad s\text{-}L^2$$

Enfin, ils montrent que la fonction

$$t \mapsto (u(t), e(t), p(t))$$

est absolument continue de $[0, T]$ dans

$$BD(\Omega) \times L^2(\Omega; H_0^{N \times N}) \times \mathcal{M}_b(\Omega \cup \Gamma_0; H_0^{N \times N})$$

On a donc :

THEOREME [Dal Maso et al.]

Sous les hypothèses du début de la séance, avec une condition initiale satisfaisant (qs 1), il existe $(u, e, p) \in AC([0, T]; BD(\Omega) \times L^2(\Omega; H_0^{N \times N}) \times \mathcal{M}_b(\Omega \cup \Gamma_0; H_0^{N \times N}))$ satisfaisant la condition initiale, (qs 1) et (qs 2).

Par construction $(u(t), e(t), p(t)) \in \overline{CA}(U(t))$ et, donc, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\varepsilon(u(t)) = e(t) + p(t)$$

$$m. u|_{\Gamma_0}(t) = m. U(t)$$

On vérifie (mais ce n'est pas immédiat) que la condition d'optimalité entraîne que, pour tout $t \in [0, T]$:

- $\mathcal{M}e(t) \in K$
- $\forall u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ avec $u|_{\Gamma_0} = 0$

$$\int_{\Omega} e(t) : \mathcal{M} E(u) = \int_{\Omega} F(t) \cdot u + \int_{\Gamma_T} T(t) \cdot u$$

(c'est-à-dire $\mathcal{M}e(t)$ SA avec $F(t)$ et $T(t)$).

Il me reste donc qu'à voir dans quel sens les solutions énergétiques $(u(t), e(t), p(t))$ satisfont la loi d'écoulement.

On a d'abord une expression de la dissipation en terme de dérivée temporelle de $p(t)$.

PROPOSITION [Dal Maso et al.]

soit $p \in AC([0, T]; \mathcal{M}_b(\Omega; H_0^{N \times N}))$,
 $u \in AC([0, T]; BD(\Omega))$, $e \in AC([0, T]; L^2(\Omega; H_0^{N \times N}))$

Alors:

$$p(t) = \nu^* - \lim_{s \rightarrow t} \frac{p(s) - p(t)}{s - t}, \quad u(t) = \nu^* - \lim_{s \rightarrow t} \frac{u(s) - u(t)}{s - t}$$

$$e(t) = \nu \cdot \lim_{s \rightarrow t} \frac{e(s) - e(t)}{s - t}$$

existent pour presque tout $t \in [0, T]$, définissent des fonctions mesurables de t et on a:

$$\mathcal{D}_{H_K}(p; [0, T]) : \int_0^t H_K(\dot{p}(s)) ds$$

$$\varepsilon(\dot{u}(t)) = \dot{\varepsilon}(t) + \dot{p}(t)$$

$$\dot{p} \in \Gamma_0 = (\dot{U} - u) \otimes m \in H^{N+1} \in \Gamma_0$$

On a vu à la séance précédente que la formule de Green permet de donner un sens à:

$$\sigma : \varepsilon(u)$$

en tant que mesure sur Ω , dès que σ est à la fois plastiquement admissible et statiquement admissible avec F, T . On a alors la formule de Green généralisée:

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(u - U) = \int_{\Omega} F \cdot (u - U) + \int_{\Gamma_f} T \cdot (u - U)$$

où U est la solution du problème élastique:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \Lambda \varepsilon(U) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \Lambda \varepsilon(U) \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_f \\ U|_{\Gamma_0} = U & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

On peut alors définir la mesure $\sigma : \dot{p} = \sigma_0 : \dot{p}$

sur $\Omega \cup \Gamma_0$ par:

$$\begin{aligned}\sigma_D : \dot{p} &:= \sigma_D : \varepsilon_D(u) - \sigma_D : e_D \quad \text{ds } \Omega \\ \sigma_D : \dot{p} &:= (\sigma m)_t \cdot (U_t - u_t) \quad \text{sur } \Gamma_U \\ &= (U - u) \cdot \sigma \cdot m\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant.

$$\int_{\Omega} \sigma_D : \dot{p} \, \varphi = \int_{\Omega} \sigma_D : (\varepsilon_D(u) - e_D) \, \varphi + \int_{\Gamma_U} (U - u) \cdot \sigma \cdot m \, \varphi \, d\mathcal{H}^n$$

On montre alors que toute solution énergétique, c'est-à-dire satisfaisant (qs1) et (qs2) satisfait :

$$(i) \quad \int_{\Omega} \sigma_D : \dot{p} = \mathcal{H}_K(\dot{p}) = \int_{\Omega} H_K\left(\frac{d\dot{p}}{d|\dot{p}|}\right) d|\dot{p}|$$

(ii) Pour tout τ plastiquement statiquement admissible avec F, T , et pour presque tout t :

$$[\sigma_D(t) - \tau_D] : \dot{p} \geq 0$$

en tant que mesure

REMARQUE: On peut aller encore plus loin et construire un représentant $\hat{\sigma}_D$ de σ_D ($\hat{\sigma}_D = \sigma_D$ p.p.t. $x \in \Omega$) tel que la loi d'écoulement soit satisfaite ponctuellement :

$$\text{p.p. } t \in [0, \tau] \quad \text{p. } |\dot{p}(t)| \text{ p.p.t. } x \in \Omega \cup \Gamma_U \quad \frac{\dot{p}(t)}{|\dot{p}(t)|}(x) \in N_K(\hat{\sigma}_D(t, x)).$$

Phénoménologie des bandes de cisaillement

Les bandes de cisaillement sont à chaque instant l'ensemble $J_u(t)$ de saut du champ de déplacement $J_u(t)$.

Cet ensemble est dénombrablement $\mathcal{H}^{n-1}$ -rectifiable
($\exists f_i : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitziennes tq $\mathcal{H}^{n-1}(J_u \setminus \bigcup_{i=0}^\infty f_i(\mathbb{R}^n)) = 0$)

Pour chaque $x \in J_u$, le triplet

$$(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x))$$

est uniquement défini à une permutation de $u^+(x), u^-(x)$ et un changement de signe de $\nu_u(x)$ près.

Cela veut dire que J_u est une réunion dénombrable "d'hypersurface" localement Lipschitzienne. Elle peuvent avoir des points anguleux, mais ont une normale défini $\mathcal{H}^{n-1}$ presque partout, comme le bord d'un ouvert Lipschitzien.

Elles peuvent évoluer au cours du temps, mais pas m'importe comment. Les solutions de la plasticité ont la particularité d'être régulières en particulier

continue par rapport au temps.

$$\begin{aligned} E(u) &\in AC([0, T]; \mathcal{M}_b(\Omega; H_0^{n \times n})) \\ &\subset C^0([0, T]; \mathcal{M}_b(\Omega; H_0^{n \times n})) \end{aligned}$$

En dimension 1 d'espace, on a :

$$\| \delta_t - \delta_s \|_{\mathcal{M}_b} = \begin{cases} 2 & \text{si } s \neq t \\ 0 & \text{si } s = t \end{cases}$$

donc $t \rightarrow \delta_t$ n'est pas continue de $[0, T]$ vers l'espace des mesures (munie de la topologie forte).

Cela signifie que si un saut de u apparaît $u(x+) \neq u(x-)$, il ne peut pas se déplacer au cours du temps. Seule son amplitude $u(x+) - u(x-)$ peut évoluer (continuellement) au cours du temps. Les sauts peuvent naître ou bien se résorber, mais ils ne se déplacent pas.

C'est pareil en dimension supérieure : les mouvements locaux des bandes de cisaillement sont prohibés : les bandes de cisaillement peuvent s'allonger ou se raccourcir, mais pas se déplacer "latéralement".

Exemple de solution inévitablement discontinue en espace.

$$N=1, \Omega =]-1,1[, \Gamma_0 = \{-1,1\}, \Lambda=1, K = [-1,1]$$

$$U = 0$$

$$F(t, x) = \begin{cases} t(x+1) & \text{si } x \in]-1,0[\\ t(x-1) & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + F = 0 \quad (\text{ou SA}) \quad (\Rightarrow)$$

$$\sigma(t, x) = \begin{cases} C(t) - t\left(\frac{x^2}{2} + x\right) & \text{si } x \in]-1,0[\\ C(t) - t\left(\frac{x^2}{2} - x\right) & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

où $C(t)$ est une fonction du temps seulement.

Pour la calculer, résolvons le problème élastique en minimisant l'énergie complémentaire :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 |\sigma(x,t)|^2 dx$$

sur tous les champs $\sigma(x,t)$ SA. Il vient :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 |\sigma(x,t)|^2 dx = [C(t)]^2 + \frac{2t}{3} C(t) + t^2 \frac{23}{60}$$

qui est rendu minimale par $C(t) = -\frac{t}{3}$.

Cette solution est élastique pour $t \in [0,3]$.

En $t=3$, le point $x=0$ plastifie.

La condition de charge nulle est satisfaite pour $t \in [3, 4[$ et n'est plus satisfaite pour $t \geq 4$.

Pour $t \in [3, 4[$, $\sigma(t, x)$ est donnée par :

$$\sigma(t, x) = \begin{cases} -1 - t \left(\frac{x^2}{2} + x \right) & \text{si } x \in]-1, 0[\\ -1 - t \left(\frac{x^2}{2} - x \right) & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

Pour le prouver, comme $\sigma(t, x)$ est unique, il suffit de vérifier :

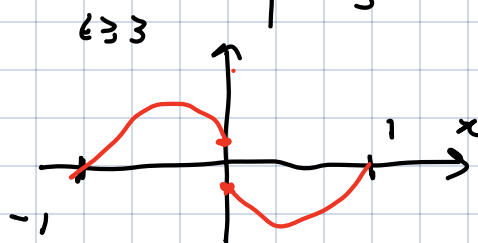
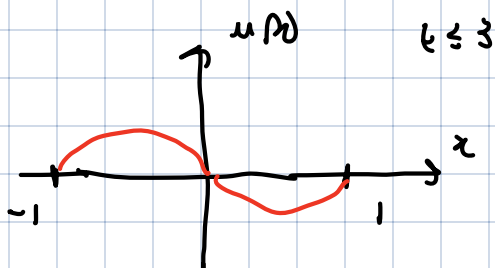
$$\forall z \text{ SA \& PA} \quad \int_{-1}^1 \dot{\sigma}(z - \sigma) \geq 0$$

ce qui est facile. On obtient alors :

$$u(x, t) = \begin{cases} c(t) [x+1] - t \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} \right) & \text{si } x \in]-1, 0[\\ c(t) [x-1] - t \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \right) & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

$$u(0^-) = \frac{t}{3} + \max\left(-\frac{t}{3}, -1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 3] \\ \frac{t}{3} - 1 & \text{si } t \in [3, 4[\end{cases}$$

$$u(0^+) = -\frac{t}{3} - \max\left(-\frac{t}{3}, -1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 3] \\ 1 - \frac{t}{3} & \text{si } t \in [3, 4[\end{cases}$$



Ici, la solution est unique en déplacement et contrainte.

Exemple de solution multiple en déplacement.

$$N=1 \quad \Omega =]0,1[\quad \Gamma_U = \{0,1\} \quad \lambda=1 \quad K = [-1,1]$$

$$F=0 \quad U(0)=0 \quad U(1)=t$$

Condition de charge sûre toujours satisfaite par 0 qui est SH&PA.

Pour $t \in [0,1]$, on a la solution élastique $u(t,x) = tx$

ζ_0 se met à plastifier partout à $t=1$.

Soit $\Theta(x)$ une fonction croissante sur $]0,1[$ tq

$$0 \leq \Theta(0+) \leq \Theta(1-) \leq 1$$

Alors, pour $t \geq 1$ $u(t,x) = x + (t-1)\Theta(x)$

est solution (en prenant $p(t,x) = (t-1)\Theta'(x)$).

Si $0 < \Theta(0+)$ et/ou $\Theta(1-) < 1$

les conditions à la limites ne sont plus satisfaites.

$\Theta \equiv 0$ et $\Theta \equiv 1$ et $\Theta \equiv x$ sont possibles, mais

Θ peut aussi avoir une infinité de sauts.

Enfin, Θ peut être l'exalté du diable.