

Elasto-plasticité parfaite quasi-statique -

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \sigma + F = 0 \\ \varepsilon(u) = e + p \\ \sigma = \mathbb{A} : e \\ \dot{p} \in \partial I_K[\sigma] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dans } \Omega \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbb{A}e = \lambda \operatorname{tr} e \mathbb{I} + 2\mu e \\ K_D \text{ convexe fermé borné de } H_D^{sym} \end{array} \quad (*)$$
$$\begin{array}{l} \sigma \cdot n = T \\ u = U \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_T \\ \text{sur } \Gamma_U \end{array}$$

$$K := \left\{ \sigma \in H_D^{sym} \mid \sigma_0 \in K_D \right\}$$

On réintroduit la discrétisation du temps :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$$

et on cherche e, p, u satisfaisant (*) où $\dot{p}$ est remplacé par $p - p_{i-1}$.

Dans le cours précédent, on avait éliminé e et p , pour formuler un problème variationnel incrémental en σ .

On va faire la même chose pour e, p, u .

① Formulation variationnelle incrémentale en les inconnues cinématiques

Dans un premier temps, choisissons $f \in L^2(\Omega)$, $T \in L^2(\Gamma)$ comme en élasticité.

$\{ \text{On suppose, } \sigma_i \in L^2, p_i \in L^2 \xRightarrow{\text{KORN}} u_i \in H^1$

On peut de: $p_i - p_{i-1} \in \partial I_K(\sigma_i)$ $H_K(p) := \{ \sigma \mid \sigma : p \geq 0 \}$

C'est équivalent à: $\sigma_i \in \partial \mathcal{H}_K(p_i - p_{i-1})$ $\mathcal{H}_K(p - p_{i-1}) := \int_{\Omega} H_K(p - p_{i-1})$

c'est-à-dire:

(1) $\forall p \in L^2(\Omega; M_D^{N \times N}), \int_{\Omega} H_K(p - p_{i-1}) \geq \int_{\Omega} H_K(p_i - p_{i-1}) + \int_{\Omega} \sigma_i : (p - p_i)$
 $\int_{\Omega} \sigma_i : (p - p_i)$

D'autre part:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} e : M' e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} e_i : M' e_i + \int_{\Omega} e_i : M' (e - e_i) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (e - e_i) : M' (e - e_i)$$

(2) $\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} e_i : M' e_i + \int_{\Omega} \sigma_i : \underbrace{[\nabla(u \cdot u_i) - (p - p_i)]}_{e - e_i}$

(le graphe d'une fonction convexe est au-dessus d'une quelconque de ses tangentes).

On a utilisé $e + p = E(u)$ et $e_i + p_i = E(u_i)$

(1) + (2) $\Rightarrow$
 & Green

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} e : M e + \int_{\Omega} H_K(p - p_{i,1}) - \int_{\Omega} F \cdot u - \int_{\Gamma_T} T \cdot u$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} e_i : M e_i + \int_{\Omega} H_K(p_i - p_{i,1}) - \int_{\Omega} F \cdot u_i - \int_{\Gamma_T} T \cdot u_i$$

On a montré que si $e_i, p_i \in L^2$ et $u_i \in H^1$, alors ils minimisent :

$$\mathcal{E}^P(e, p, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} e : M e + \int_{\Omega} H_K(p - p_{i,1}) - \int_{\Omega} F \cdot u - \int_{\Gamma_T} T \cdot u$$

$$\text{on } CA(U) = \left\{ (e, p, u) \mid \begin{array}{l} e, p \in L^2(\Omega; H^{n \times n}_D) \quad u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \\ e + p = \mathcal{E}(u) \quad \text{et} \quad u|_{\Gamma_D} = U \end{array} \right\}$$

Réciproquement, si $(e_i, p_i, u_i) \in CA(U)$ est un tel minimiseur.

① On teste avec $(\mathcal{E}(u) - p_i, p_i, u)$. Il vient :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(u_i) - p_i] : M [\mathcal{E}(u_i) - p_i] - \int_{\Omega} F u_i - \int_{\Gamma_T} T u_i$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(u) - p_i] : M [\mathcal{E}(u) - p_i] - \int_{\Omega} F u - \int_{\Gamma_T} T u$$

qui donne :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{E}(u - u_i) : M \mathcal{E}(u - u_i) + \underbrace{\int_{\Omega} \mathcal{E}(u - u_i) : M [\mathcal{E}(u_i) - p_i]}_{=0} \geq \int_{\Omega} F \cdot (u - u_i) + \int_{\Gamma_T} T \cdot (u - u_i)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + ax \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$\Rightarrow \forall u \text{ tq } u|_{\Gamma_D} = U \quad \int_{\Omega} \mathcal{E}(u - u_i) : M \mathcal{E}(u - u_i) = \int_{\Omega} F \cdot (u - u_i) + \int_{\Gamma_T} T \cdot (u - u_i)$$

Green

$$\Rightarrow \text{div } \sigma_i + F = 0 \text{ ds } \Omega \quad \text{et} \quad \sigma_i n = T_i \text{ sur } \Gamma_T$$

② On teste avec $(\varepsilon(u_i) - p, p, u_i)$. IP vient:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} [\varepsilon(u_i) - p] : \mathbb{M} [\varepsilon(u_i) - p] + \int_{\Omega} H_K(p_i - p_{i-1}) \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\varepsilon(u_i) - p] : \mathbb{M} [\varepsilon(u_i) - p] + \int_{\Omega} H_K(p - p_{i-1})$$

soit $\int_{\Omega} \sigma_i : (p - p_i) + \int_{\Omega} H_K(p_i - p_{i-1}) \leq \int_{\Omega} H_K(p - p_{i-1}) + \int_{\Omega} (p - p_i) : \mathbb{M}(p - p_i)$

comme $H_K(p - p_{i-1}) \leq H_K(p - p_i) + H_K(p_i - p_{i-1})$:

$\forall n \geq 0$
(H_K positivement homogène de degré 1)

$$\int_{\Omega} \sigma_i : (p - p_i) - \int_{\Omega} H_K(p - p_i) \leq n \int_{\Omega} (p - p_i) : \mathbb{M}(p - p_i) \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$$

$$\mathcal{I}_K(\sigma_i) = \sup_{p - p_i} \int_{\Omega} \sigma_i : (p - p_i) - \int_{\Omega} H_K(p - p_i) = 0 \Rightarrow \sigma_i \in K$$

$\dots \Rightarrow p = (1-\lambda)p_i + \lambda p_{i-1} \Rightarrow \lambda \in]0,1[$

$$\underbrace{\int_{\Omega} H_K(p_i - p_{i-1}) - \int_{\Omega} \sigma_i : (p_i - p_{i-1})}_{\geq 0} \leq \lambda \int_{\Omega} (p_i - p_{i-1}) : \mathbb{M}(p_i - p_{i-1}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

donc $\int_{\Omega} H_K(p_i - p_{i-1}) = \int_{\Omega} \sigma_i : (p_i - p_{i-1})$ avec $\sigma_i \in K$ p.p.t $x \in \Omega$

$\Rightarrow$ p.p.t $x \in \Omega$ $\sigma_i(x) \in \partial H_K(p_i(x) - p_{i-1}(x)) \Leftrightarrow p_i - p_{i-1} \in \partial \mathcal{I}_K[\sigma_i]$

On utilise implicitement que si ψ et ψ^* sont conjuguées dans $\mathbb{R}^N$ et positives, alors $\int_{\Omega} \psi(x)$ et $\int_{\Omega} \psi^*(x)$ sont conjuguées dans $L^2(\Omega)$.

Pour $(e_i, u_i, p_i) \in CA(U)$, il y a donc rigoureusement équivalence entre minimum de l'énergie et équations locales.

La situation a l'air similaire à l'élasticité. Ce n'est qu'en apparence. Car un tel minimiseur n'existe pas toujours.

Pour obtenir l'existence, il va falloir agrandir $CA(U)$.

Pour savoir comment, il est utile d'identifier le problème de minimisation pour le seul champ de déplacement u_i .

② Formulation variationnelle en déplacement

On part de: $p_i - p_{i-1} \in \partial I_\kappa[\sigma_i]$

avec: $p_i = \varepsilon(u_i) - M^{-1} \sigma_i$

Dans un premier temps, on prend $f \in L^2(\Omega)$, $T \in L^2(\Gamma_f)$ comme en élasticité.

On suppose, $\sigma_i \in L^2$, $p_i \in L^2 \xRightarrow{\text{KORN}} u_i \in H^1$

On pose:

$$j^* \left\{ \begin{array}{l} M^{N \times N} \\ \sigma \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \mapsto \frac{1}{2} \sigma : M^{-1} \sigma + I_\kappa[\sigma] \end{array}$$

puis:

$$\begin{aligned}
 DA &:= \left\{ d \in L^2(\Omega; H_s^{N+1}) \mid \exists u \in L^2 \quad \varepsilon(u) = d + p_{i-1}, \right. \\
 &\quad \left. \text{et } u|_{\Gamma_0} = U \right\} \\
 SA &:= \left\{ \sigma \in L^2(\Omega; H_s^{N+1}) \mid \operatorname{div} \sigma + f = 0 \text{ d.o. } \Omega, \right. \\
 &\quad \left. \sigma \cdot n = T \text{ sur } \Gamma_f \right\}
 \end{aligned}$$

Les équations locales s'écrivent :

$$\text{p.p.t. } x \in \Omega, \quad d_i(x) \in \partial j^*[\sigma_i(x)], \quad d_i \in DA, \quad \sigma_i \in SA.$$

$$i \mapsto \partial j^*[\sigma_i] \neq \emptyset \Leftrightarrow \sigma_i \in K$$

Cela entraîne :

$$\forall z \in SA \quad \int_{\Omega} j^*(z) \geq \int_{\Omega} j^*(\sigma_i) + \int_{\Omega} d_i : (z - \sigma_i)$$

||

$$\text{en fait, il faudrait écrire } \langle (z - \sigma_i)_n, U \rangle \leftarrow \dots \int_{\Gamma_0} U \cdot (z - \sigma_i)_n - \int_{\Omega} p_{i-1} : (z - \sigma_i)$$

$$\text{et donc : } \sigma_i = \operatorname{argmin}_{z \in SA} \int_{\Omega} j^*(z) - \int_{\Gamma_0} U \cdot z \cdot n + \int_{\Omega} p_{i-1} : z$$

qui a un minimiseur unique.

Mais, les équations locales peuvent aussi s'écrire :

$$\text{p.p.t. } x \in \Omega \quad \sigma_i(x) \in \partial j[d_i(x)], \quad d_i \in DA, \quad \sigma_i \in SA,$$

où $j = j^{**}$ est la fonction conjuguée de j^* .

Cela entraîne:

$$\forall d \in \mathcal{DA} \quad \int_{\Omega} j(d) \geq \int_{\Omega} j(d_i) + \int_{\Omega} \sigma_i : (d \cdot d_i)$$

$$\forall u \in CA \quad \int_{\Omega} j(\varepsilon(u) - p_{i+1}) \geq \int_{\Omega} j(\varepsilon(u) - p_{i+1}) + \int_{\Omega} \tau_i(u, u_i) + \int_{\Gamma_f} \tau_i(u, u_i)$$

$$u_i = \arg \min_{CA} \int_{\Omega} j(\varepsilon(u) - p_{i+1}) - \int_{\Omega} \tau_i(u) - \int_{\Gamma_f} \tau_i(u)$$

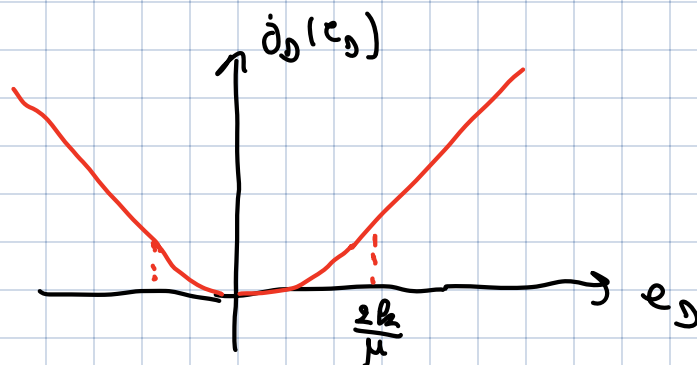
Ici:

$$j^*(\sigma) = \frac{3(1+\nu)^2}{2(3\lambda+2\mu)} + \underbrace{\frac{1}{\mu} \sigma : \sigma + I_K[\sigma]}_{j^*(\sigma)}$$

$$j(e) = \frac{3\lambda+2\mu}{6} (\text{tr } e)^2 + j_0(e_0)$$

Dans le cas du critère de Von Mises $K = \{ \sigma_D \in M_D^{n \times n} ; \sigma_D : \sigma_D \leq \frac{k^2}{\mu} \}$

$$j_0(e_0) = \sup_{|\sigma_D| \leq k} \left(\sigma_D : e_0 - \frac{1}{\mu} |\sigma_D|^2 \right) = \begin{cases} \mu \frac{|e_0|^2}{4} & \text{si } |e_0| \leq \frac{2k}{\mu} \\ k |e_0| - \frac{k^2}{\mu} & \text{si } |e_0| \geq \frac{2k}{\mu} \end{cases}$$



REMARQUE. On a aussi $j(d) = \min_{p \in M_D^{n \times n}} \frac{1}{2} (d-p) : M(d-p) + I_K(p)$

Dans le cas général, si on suppose :

$$\{z_0 \in H_D^{N \times N} \mid |z_0| \leq \pi_K\} \subset K \subset \{z_0 \in H_D^{N \times N} \mid |z_0| \leq R_K\}$$

$$\sup_{|z_0| \leq \pi_K} \leq \sup_{z_0 \in K} \leq \sup_{|z_0| \leq R_K}$$

et donc :

PROPOSITION

j_D est une fonction convexe, finie en tout point telle que :

$$\forall e_D \in H_D^{N \times N} \quad h_0(|e_D| \cdot 1) \leq j_D(e_D) \leq h_1|e_D|$$

pour $0 \leq h_0 \leq h_1 < \infty$.

Au final, si $p_{i,j} \in L^2$ et les équations locales admettent une solution $u_i, p_i, \sigma_i \in H^1 \times L^2 \times L^2$, alors :

$$\mathcal{S}^* : \quad \sigma_i = \arg \min_{\sigma \in SA} \int_{\Omega} j^*(\sigma) - \int_{\Gamma_D} U \cdot \sigma \cdot n + \int_{\Omega} p_{i,j} : \sigma$$

$$j^*(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma M' \sigma + I_K(\sigma_D)$$

$$\mathcal{S} : \quad u_i = \arg \min_{u \in CA} \int_{\Omega} j(\varepsilon(u) - p_{i,j}) - \int_{\Omega} F \cdot u - \int_{\Gamma_T} T \cdot u$$

$\Downarrow$

$$\mathcal{S} : \quad \varepsilon(u_i) - p_{i,j} = \arg \min_{d \in DA} \int_{\Omega} j(d) - \int_{\Omega} F \cdot u(d, p_{i,j}) - \int_{\Gamma_T} T \cdot u(d, p_{i,j})$$

Pour simplifier, on prendra dorénavant $p_{i-1} = 0$.

En prenant $j^*(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma : M^{-1} \sigma$ et $j(d) = \frac{1}{2} d : M d$ on retrouve les deux problèmes de minimum duaux de l'élasticité linéarisée.

Pour la plasticité de Hencky, on prend j^* et j comme définies plus haut. Les choix suivants permettent de se replacer dans le contexte d'application du théorème de Fenchel-Rockafellar.

$$\phi(d) := \int_{\Omega} j(d) \quad \text{défini et continu pour } d \in L^2(\Omega; M^{N \times N})$$

$$\psi(d) := \begin{cases} - \int_{\Omega} F \cdot u(d) - \int_{\Gamma_T} T \cdot u(d) & \text{si } \exists u \in H^1 \mid \begin{cases} \text{avec } \varepsilon(u) = d \\ \text{et } u|_{\Gamma_0} = U \end{cases} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\phi^*(\sigma) := \int_{\Omega} j^*(\sigma) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \text{pour } \sigma \in L^2(\Omega; M^{N \times N})$$

$$\psi^*(\sigma) := \begin{cases} \int_{\Gamma_0} U \cdot \sigma \cdot n & \text{si } \begin{cases} - \operatorname{div} \sigma + F = 0 & \text{dans } \Omega \\ - \sigma \cdot n = T & \text{sur } \Gamma_T \end{cases} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La question est donc maintenant de savoir si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^*$ ont toujours des minimiseurs.

La réponse est non.

S'il n'existe aucun champ de contrainte à la fois statiquement et plastiquement admissible, la fonctionnelle $\phi^*(\sigma) + \psi^*(-\sigma)$ associée à $\mathcal{P}^*$ est identiquement égale à $+\infty$.

Le théorème de Fenchel-Rockafellar donne cependant.

THÉORÈME Les 3 conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) $\exists \sigma$ à la fois SA et PA.
- (ii) $\inf \mathcal{P} > -\infty$
- (iii) $\inf \mathcal{P}^* \in \mathbb{R}$ et $\inf \mathcal{P} + \inf \mathcal{P}^* = 0$

Si une de ces conditions (et donc toutes) est satisfaite, $\mathcal{P}^*$ a un minimum unique.

La condition (i) est indépendante de Λ .

On peut donc reprendre l'analyse en faisant $\Lambda^* = 0$ dans j^* . On a alors $\tilde{j}^*(\sigma) = I_K(\sigma)$ et $\tilde{j}(d) = H_K(d)$ fonction d'appui de K .

Comme $K = \{ \sigma \in L^2(\Omega; M^{N \times N}) \mid \sigma_0 \in K_0 \text{ p.p.} \}$

(critère insensible à la pression)

$$\tilde{j}(d) := \begin{cases} \tilde{j}_0(d) = H_{K_0}(d) & \text{si } \gamma_n d = 0 \\ +\infty & \text{si } \gamma_n d \neq 0 \end{cases}$$

Comme la condition (i) est aussi indépendante de U ,
on peut choisir $U=0$ et obtenir les deux problèmes
duaux $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Phi}^*$ suivants :

$$\tilde{\Phi}(d) = \int_{\Omega} \tilde{J}_D(d) \quad \text{définie et continue sur } L^2(\Omega; M_D^{N \times N})$$

$$\tilde{\Psi}(d) = \begin{cases} - \int_{\Omega} F \cdot u(d) - \int_{\Omega} T \cdot u(d) & \text{si } \exists u \in H^1(\Omega) : \begin{cases} \varepsilon(u) = d \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u|_{\Gamma_0} = 0 \end{cases} \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\tilde{\Phi}^*(\sigma) := I_K(\sigma)$$

$$\tilde{\Psi}^*(\sigma) := \begin{cases} 0 & \text{si } \exists p \in L^2(\Omega) : \begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma + p \frac{1}{2}) + F = 0 \text{ sur } \Omega \\ -(\sigma + p \frac{1}{2}) \cdot n = T \text{ sur } \Gamma \end{cases} \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\tilde{\Phi}^*$ et $\tilde{\Psi}^*$ sont définies sur $L^2(\Omega; \frac{M_D^{N \times N}}{\mathbb{R} \cdot 1}) = L^2(\Omega; M_D^{N \times N})$

Comme $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$ sont positivement homogènes de degré 1,
on a :

$$\inf \mathcal{P} > -\infty \iff \inf \mathcal{P} = 0$$

de sorte que le théorème de Fenchel-Rockafellar donne :

THEOREME [Analyse Pénalisée] Les 3 conditions suivantes sont
équivalentes.

(i) $\exists \sigma \in L^2(\Omega; M_D^{N \times N})$ à la fois SA et PA.

(iv) $\inf_{u \in V} \int_{\Omega} H_K(\varepsilon_D(u)) - L(u) = 0$

$$\text{où } V := \{ u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \mid \operatorname{div} u = 0 \text{ et } u|_{\Gamma_0} = 0 \}$$

$$(w) \quad \inf_{u \in W} \int_{\Omega} H_k(\varepsilon_0(u)) \geq 1$$

$$\text{où } W := \{ u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \mid \operatorname{div} u = 0 \text{ et } u|_{\Gamma_0} = 0 \\ \text{et } L(u) := \int_{\Omega} F \cdot u + \int_{\Gamma} T \cdot u = 1 \}$$

Notons que si cette condition est satisfaite pour $(F, T) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \times L^2(\Gamma_T; \mathbb{R}^N)$ alors elle est satisfaite pour tous les $(\alpha F, \alpha T)$ tq $\alpha \in [0, 1]$.

Donc, étant donné $(F, T) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \times L^2(\Gamma_T; \mathbb{R}^N)$, il y a une valeur maximale de $\alpha \in \mathbb{R}^+$ telle que il existe σ à la fois plastiquement admissible et statiquement admissible pour $\alpha F, \alpha T$.

$\inf_{u \in W} \int_{\Omega} H_k(\varepsilon_0(u))$ donne la valeur maximale $\alpha^{\max} \in \mathbb{R}^+$ de α tq $\exists \sigma$ à la fois PA et SA avec $(\alpha F, \alpha T)$.

Supposons qu'il existe σ à la fois PA et SA est nécessaire, mais pas suffisant. Cela dit que la fonctionnelle associée à $\mathcal{P}$ est bornée inférieurement, mais ce n'est pas suffisant (penser à $E(x) = e^{-x}$), il faut de la coercivité.

On est donc amené à postuler la condition de charge sure suivante.

CONDITION DE CHARGE SURE

Les deux conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $\exists \lambda > 1$ et $\rho \in L^2(\Omega; M_{\lambda}^{N \times N})$ tq

- ρ est SA avec $\lambda F, \lambda T$:

$$\forall u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \text{ avec } u|_{\Gamma_0} = 0 \quad \int_{\Omega} \rho : \varepsilon(u) = \int_{\Omega} \lambda F u + \int_{\Gamma_f} \lambda T u$$

- ρ est PA:

$$\text{p.p.t. } x \in \Omega \quad \rho_D(x) \in K_D$$

(ii) $\exists \rho \in L^2(\Omega; M_{\lambda}^{N \times N})$ tq:

- ρ est SA avec F, T :

- $\exists \alpha > 0 \quad \forall z \in M_D^{N \times N}$ avec $|z| < \alpha$

$$\text{p.p.t. } z \in \Omega \quad \rho_D(z) + z \in K_D.$$

La condition de charge sure donne le résultat suivant:

PROPOSITION

Sous la condition de charge sure:

$$\lim_{\substack{\| \varepsilon(u) \|_1 \rightarrow \infty \\ u \in CA}} \int_{\Omega} j(\varepsilon(u)) - \int_{\Omega} F \cdot u - \int_{\Gamma_f} T \cdot u = +\infty$$

$$\text{où } CA = \left\{ u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \mid u|_{\Gamma_0} = 0 \right\}$$

PREUVE

$\exists d > 1$

$\forall q$

$$\int_{\Omega} j(\varepsilon(u)) - \int_{\Omega} d F \cdot u - \int_{\Gamma} d T \cdot u \geq C$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\Omega} j(\varepsilon(u)) - \int_{\Omega} F \cdot u - \int_{\Gamma} T \cdot u &\geq \left(1 - \frac{1}{d}\right) \int_{\Omega} j(\varepsilon(u)) + \frac{C}{d} \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{d}\right) h_0 \int_{\Omega} (|\varepsilon_0(u)| - 1) + \underbrace{\frac{3d+2q}{6} \int_{\Omega} [f_n \varepsilon(u)]^2}_{\geq \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} |f_n \varepsilon(u)| \right)^2} + \frac{C}{d} \end{aligned}$$

Si, on avait

$\lim_{\substack{\|\varepsilon(u)\|_{L^2} \rightarrow \infty \\ u \in CA}} \dots$

au lieu de

$\lim_{\substack{\|\varepsilon(u)\|_{L^1} \rightarrow \infty \\ u \in CA}} \dots$

!!

!!

on pourrait faire exactement la même démonstration que dans le cas de l'élasticité linéarisée pour conclure à l'existence d'un minimiseur.

Mais, ici on ne peut pas extraire de sous-suite convergente faiblement dans H^1 d'une suite minimisante.

Pour obtenir la compacité manquante, on pourrait être tenté de travailler dans l'espace suivant (plus grand que H^1 , car $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ pour Ω borné):

$$LD(\Omega) := \{ u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid \varepsilon_{ij}(u) \in L^1(\Omega) \}$$

↑ ici on peut mettre ce qu'on veut

et même $D^1(\Omega)$. Ça ne change pas l'espace si Ω est C^1 .

Mais, L_D , comme L' , n'est pas réflexif et on ne peut donc pas toujours extraire de suite faiblement convergente d'une suite bornée (car ce fait est équivalent à dire que l'espace est réflexif).

Pour s'en sortir, on plonge L' dans M_b qui n'est toujours pas réflexif, mais qui est le dual d'un espace séparable. De sorte que on peut extraire de toute suite bornée dans M_b une suite faiblement étoilée convergente (alors qu'il n'existe pas forcément de sous-suite faiblement convergente). On pose :

$$BD(\Omega) := \{ u \in L'(\Omega; \mathbb{R}^N) \mid \varepsilon_{ij}(u) \in M_b(\mathbb{R}) \}$$

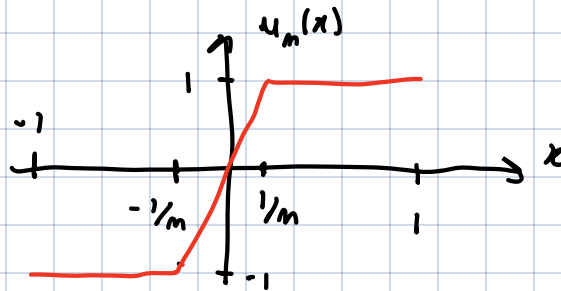
⌚ si Ω est C^1 , on peut mettre $\mathcal{D}'(\Omega)$ ici.

Mais la limite faible étoilée sera dans BD en général et pas forcément dans L_D . Et, BD peut avoir des discontinuités, alors que pas L_D . Enfin, BD est strictement plus grand que :

$$BV(\Omega) := \{ u \in L'(\Omega; \mathbb{R}^N) \mid u_{,i,j} \in M_b(\mathbb{R}) \}$$

cela vient du fait qu'il n'y a pas d'inégalité de Korn dans L^1 et de même $C^0(\Omega) \not\subset W^{1,1}(\Omega)$.

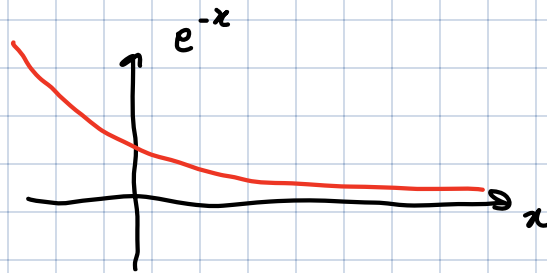
EXEMPLE



$$\|u'_m\|_{L^1} = 1$$

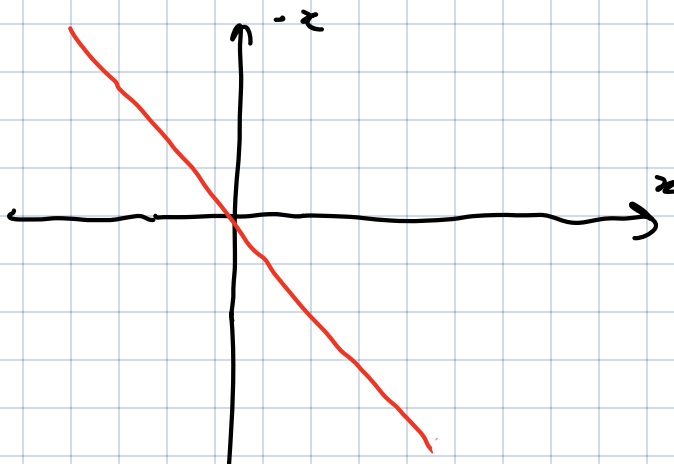
$$\|u'_m\|_{L^2} = \sqrt{m}$$

Posé dans H^1 , le problème de minimisation se comporte comme :



(les suites minimisantes peuvent partir à l'infini)

En dehors de la condition de charge fixe, il se comporte dans n'importe quel espace comme :



PROPRIÉTÉS

- ① $BD(\Omega)$ est le dual d'un espace séparable
($C^0(\bar{\Omega}, H_s^{N,N}) / C^0(\bar{\Omega}, H_s^{N,N}) \cap SA(0,0)$)

et:

$$u^n \rightharpoonup u \text{ dans } W^{1,p} - BD \text{ ssi } \begin{cases} u^n \rightarrow u & \text{p.s. } L^1 \\ \varepsilon_{ij}(u^n) \rightharpoonup \varepsilon_{ij}(u) & \text{ds } W^{1,p} \end{cases}$$

(N.B. $BD \subset L^p \quad \forall p \in [1, \frac{N}{N-1}]$ (pour Ω borné Lipschitz)
et l'injection est compacte pour $p < \frac{N}{N-1}$
il en résulte que $u^n \rightarrow u$ p.s. L^1).

De toute suite bornée dans BD , on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement étoilée.

- ② Comme en dimension 1, $BD = BV$, les champs de déplacement BD , peuvent avoir des discontinuités à travers des surfaces (qui peuvent être irrégulières). C^∞ n'est pas dense dans BD (il ne l'est pas dans BV non plus) et il faut faire attention pour définir la trace tr .

On le fait en utilisant la formule de Green.

THEOREME } On suppose Ω borné Lipschitzien.
 Il existe un (unique) opérateur linéaire
 continu $\text{tr} : BD(\Omega) \rightarrow C^1(\partial\Omega)$ tq pour
 tout $u \in BD(\Omega)$:
 $\forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}; M_s^{N \times N}) \quad \int_{\Omega} \varphi : \varepsilon(u) + \int_{\Omega} \text{div} P \cdot u = \int_{\partial\Omega} (\text{tr} u) \varphi_n$

Soit S une hypersurface Lipschitzienne partageant
 Ω en deux parties ouvertes disjointes Ω^+ et Ω^- .

Soit n la normale unitaire sortante à Ω^- sur S .

Les restrictions de u à Ω^+ et Ω^- sont des BD

$\mathcal{A}$, en notant u^+ la trace du côté Ω^+ et u^- la

trace côté Ω^- , la somme des formules de Green donne:

$$\forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}; M_s^{N \times N}) \quad \int_{\Omega} \varphi : \varepsilon(u) + \int_{\Omega} \text{div} P \cdot u = \int_{\partial\Omega} (\text{tr} u) \varphi_n$$

$$+ \int_S (u^-_i - u^+_i) \varphi_{ij} n_j$$

$$- \int_S (u^+ - u^-) \hat{\otimes} n : \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1}$$

Si $u|_{\Omega^+} \in W^{1,1}$

$$\varepsilon(u) = \varepsilon(u|_{\Omega^+}) \mathcal{L}^N + \varepsilon(u|_{\Omega^-}) \mathcal{L}^N + \underbrace{(u^+ - u^-)}_{\llbracket u \rrbracket} \otimes n \, \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S$$

Pour $u \in BD(\Omega)$ quelconque, on appelle ensemble de saut J_u l'ensemble des $x \in \Omega$ tels que :

- $\exists \nu_u(x)$ avec $|\nu_u(x)| = 1$ et $u^+(x) \neq u^-(x)$ tels que :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho^\pm(x, \nu_u(x))} |u(y) - u^\pm(x)| \, dy = 0$$

où $B_\rho^\pm(x, \nu_u(x))$ sont les 2 demi-boules ouvertes de rayon ρ .

Dans ce cas, la fonction rassemblée $u_\rho(y) := u(x + \rho y)$ converge dans $L^1(B_1(0); \mathbb{R}^N)$, lorsque $\rho \rightarrow 0^+$, vers :

$$u_0(y) := \begin{cases} u^+(x) & \text{si } y \cdot \nu_u(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } y \cdot \nu_u(x) < 0 \end{cases}$$

Ceci montre que si $u^+(x) \neq u^-(x)$, le triplet $(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x))$ est uniquement déterminé à un changement près de ν_u en son opposé et à une permutation de $u^+(x)$ et $u^-(x)$.

(Ambrosio, Coscia, Dal Maso, (1996)).

L'ensemble de saut J_u est dénombrable et $\mathcal{H}^{N-1}$ rectifiable $\left(\exists f_i : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ Lipschitziennes tq } \mathcal{H}^{N-1} \left(J_u \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^{N-1}) \right) = 0 \right)$

On a alors:

$$\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}^a(u) + \mathcal{E}^c(u)$$

$$\text{et } \mathcal{E}^a(u) = (u^+ - u^-) \otimes \nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_u + \mathcal{E}^c(u)$$

où la partie canon $\mathcal{E}^c(u)$ s'annule sur tout ensemble Borélien réunion dénombrable d'ensembles de mesure $\mathcal{H}^{N-1}$ dans $]0, +\infty[$.

Pour conclure à l'existence d'un minimiseur, il faut maintenant "projeter" $\mathcal{S}$ de $H^1(\Omega)$ à $BD(\Omega)$.

De manière à obtenir une fonctionnelle semi-continue inférieurement pour la topologie faible étoile de BD , qui soit la plus grande possible.

Plus précisément, on prend $F \in L^N(\Omega; \mathbb{R}^N)$ et $T \in C^\infty(\Gamma; \mathbb{R}^N)$.

Étant donné:

$$J(u) = \begin{cases} \frac{3\lambda^2 \mu}{6} \int_{\Omega} [\ln \varepsilon(u)]^2 + \int_{\Omega} j_0(\varepsilon_0(u)) - \int_{\Omega} f \cdot u - \int_{\Gamma_f} \tau \cdot u & \text{si } u \in \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma_0} = 0\} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On doit calculer la relaxée faible étoile $\bar{J}$ de J , définie comme étant le supremum de toutes les minorante faiblement étoile s.c.i. de J .

$\bar{J}$ est caractérisée par :

$$\forall u \quad \forall u_n \xrightarrow{*} u \text{ ds } w^{*-}BD$$

$$\bar{J}(u) \leq \liminf_{u_n \xrightarrow{*} u} J(u_n)$$

$$\forall u \quad \exists u_n \xrightarrow{*} u \text{ ds } w^{*-}BD$$

$$\bar{J}(u) \geq \limsup_{u_n \xrightarrow{*} u} J(u_n)$$

C'est difficile et on ne va pas le faire, on va juste donner le résultat et les idées clés permettant d'y arriver.

- Pour $j_D: \mathcal{M}_D^{N,N} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, tq. $C_1(|x|-1) \leq \phi(x) \leq C_2|x|$
on peut définir $j_D(E_D)$ pour E_D mesure dans le même
esprit que $|\mu|$ pour μ mesure. $j_D(E_D)$ est alors
une mesure.

En décomposant E_D en partie absolument continue
et singulière, cela donne ici :

$$E_D = \underbrace{E^a}_{\mathcal{L}^1} \underbrace{\chi^N}_{\text{Laguerre}} + E_D^s$$

$$j_D(E_D) = j_D(E_D^a) \chi^N + H_K\left(\frac{dE_D^s}{d|E_D^s|}\right) |E_D^s|$$

La fonctionnelle

$$E_D \rightarrow \int_{\Omega} j_D(E_D)$$

est alors s.c.i faible étoile sur $M_n(\Omega)$.

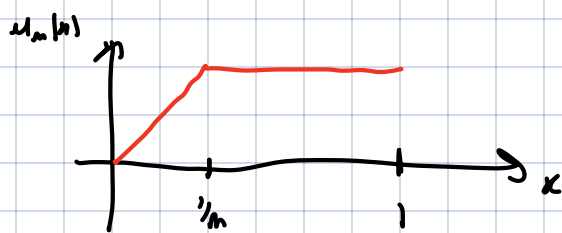
- Au final, la relaxée (plus grande minorante
s.c.i faible étoile) de

$$J(\mu) := \begin{cases} \frac{3d+2n}{6} \int_{\Omega} (H_n \mu)^2 + \int_{\Omega} j_D(\mu_D) & \text{si } \mu \in \mathcal{L}^2(\Omega) \\ +\infty & \text{si } \mu \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{L}^2 \end{cases}$$

est :

$$\bar{J}(\mu) := \begin{cases} \frac{3d+2}{6} \int_{\Omega} (H_{\Omega} \mu)^2 + \int_{\Omega} j_0(H_{\Omega}^a) \chi^N + H_K \left(\frac{dH_{\Omega}^a}{d|H_{\Omega}^a|} \right) d|H_{\Omega}^a| & \text{si } \ln \mu \in L^2 \\ +\infty & \text{si } \ln \mu \notin L^2 \end{cases}$$

- Ça ne suffit pas, car la condition à la limite en déplacement n'est pas stable par convergence w^* -BD. Pour le voir, prenons $\Omega =]0,1[$.



u_n est bornée dans $BD(]0,1[) = BV(]0,1[)$

$$u_n \xrightarrow{*} \chi_{]0,1/2[} \text{ dans } w^*\text{-}BD(]0,1[)$$

$$\forall n \quad u_n(0+) = 0 \quad \text{et pourtant} \quad u(0+) = 1$$

D'un point de vue mécanique, l'interprétation est claire, l'introduction de BD permet de rendre compte des discontinuités de déplacement observées par les mécaniciens dans les calculs numériques et les exemples de solutions exactes.

Mais, ces discontinuités peuvent se loger sur Γ , et empêcher la satisfaction de la condition à la limite.

La solution est d'ajouter Γ_U à Ω et de considérer la condition à la limite comme une "trace externe" distincte de la trace interne.

Mais dans ce cas, on doit retrouver la dissipation correspondante dans l'énergie relaxée.

On a alors le résultat suivant:

La relaxée dans w^s -BD (plus grande miniorante s.c.i. faible étoile) de :

$$J(u) = \begin{cases} \frac{3\lambda+2\mu}{6} \int_{\Omega} [\nabla \cdot E(u)]^2 + \int_{\Omega} d_D(E_D(u)) & \text{si } u \in \{u \in H^1 \mid u|_{\Gamma_U} = U\} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$$\bar{J}(u) = \begin{cases} \frac{3\lambda+2\mu}{6} \int_{\Omega} [\nabla \cdot E(u)]^2 + \int_{\Omega} d_D^s(E_D^s(u)) dx + \int_{\Omega} H_K\left(\frac{dE_D^s(u)}{d|E_D^s(u)|}\right) d|E_D^s(u)| \\ + \int_{\Gamma_U} H_K((U-u) \hat{\otimes} n) d\mathcal{H}^{n-1} & \text{si } u \in \{u \in BD \mid u \cdot n|_{\Gamma_U} = u \cdot U \\ \quad + \nabla \cdot E(u) \in L^2\} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{où } H_K((U-u) \hat{\otimes} n) = H_K(((U-u) \hat{\otimes} n)_D)$$

La prise en compte des forces de surface T ou Γ introduit encore des difficultés supplémentaires au la fonction.

$$\int \mathcal{B} D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\mu \mapsto \int_{\Omega_T} T \mu$$

n'est pas semi-continue inférieurement pour la topologie faible étoilée de $\mathcal{B}D$.

On a cependant le résultat suivant :

THEOREM [TEMAH]

On suppose $F \in L^N(\Omega; \mathbb{R}^N)$, $T \in L^\infty(\Gamma; \mathbb{R}^N)$ et la condition de charge sure vérifiée.

Alors, l'enveloppe s.c.i. pour la topologie faible étoilée BD de $\mathbb{P}$ est :

$$\frac{3\lambda+2\mu}{6} \int_{\Omega} [f_n E(u)]^2 + \int_{\Omega} j_D^{\#}(\varepsilon_D^q(u)) dx + \int_{\Omega} H_K\left(\frac{d\varepsilon_D^{\#}(u)}{d|\varepsilon_D^{\#}(u)|}\right) d\varepsilon_D^{\#}(u) \\ + \int_{\Gamma_U} H_K((U-u) \otimes m) d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega} F_U - \int_{\Gamma_J} F_N \quad \text{si } u \in (BD) \mid m, u|_{\Gamma_J} = m, U \\ \rightarrow \varepsilon(u) \in L^2 \Bigg| \\ \rightarrow \infty \quad \text{dimension}$$

$\overline{\mathcal{P}}$ a au moins un minimiseur et :

$$\min \overline{\mathcal{P}} + \min \mathcal{P}^* = 0$$

$$(\Rightarrow \inf \mathcal{P} = \min \overline{\mathcal{P}}).$$

Le minimiseur satisfait évidemment $\nabla \varepsilon(u) \in L^2(\Omega)$

et donc $\varepsilon_D^A(u)$ est à valeur dans $H_D^{N \times N}$.

JP en résulte que :

$$[[u]] \otimes \vec{\nu}_n \in \mathcal{H}^{N+1} \subset J_n \quad \text{est à valeur dans } H_D^{N \times N}$$

soit :

$$\text{p. } \mathcal{H}^{N+1} \text{ p. t. } z \in J_n \quad \text{on } [[u(z)]] \otimes \vec{\nu}_n(z) = 0$$

soit :

"

$$[[u(s)]] \cdot \vec{\nu}_n(s) = 0$$

c'est-à-dire les discontinuités de u sur l'ensemble de saut sont tangentielles.

Les suites minimisantes dans H' de $\mathcal{P}$ peuvent localiser sur des surfaces de discontinuité tangentielle : les bandes de cisaillement.

Le problème de TELAR est éclairé par une dualité généralisée entre :

$$\overline{CA} = \left\{ u \in BD(\Omega) \mid m.u|_{\Gamma_0} = m.U \right\}$$

$$SA \cap PA = \left\{ \sigma \in L^2(\Omega) \mid \operatorname{div} \sigma + F = 0 \text{ dans } \Omega \right.$$

$$\left. \sigma.n = T, \text{ sur } \Gamma_T, \quad \sigma_\nu \in K_\nu \text{ dans } \Omega \right\}$$

C'est nécessaire car $\sigma \in L^2(\Omega)$ n'est défini que p.p.

$\sigma : E(u) \in M$ peut avoir des singularités sur l'ensemble de saut qui est Lebesgue-négligeable.

En fait, pour $u \in \overline{CA}$, $\sigma \in SA \cap PA$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, le membre de droite de :

$$\int_{\Omega} \sigma : E(u) \varphi = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma) \cdot u \varphi \, d\mathcal{L}^N - \int_{\Omega} \sigma : (u \otimes \operatorname{grad} \varphi) \, d\mathcal{L}^N$$

est bien défini comme somme d'intégrales ordinaires.

Cela permet de définir $\sigma : E(u)$ en tant que distribution.

On montre alors que c'est une mesure bornée sur Ω :

$$\exists C \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \left| \int_{\Omega} \sigma : E(u) \varphi \right| \leq C \max_{\Omega} |\varphi|$$

Cela donne un sens à $\int_{\Omega} \sigma : E(u)$, ce qui m'allait

pas de soi car on rappelle que $\sigma \in L^2(\Omega; M_s^{n \times n})$
 et est donc seulement défini pour presque tout
 $x \in \Omega$. En revanche, $\epsilon(u)$ est une mesure
 pouvant avoir une partie singulière concentrée sur
 un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Introduisant la solution élastique U de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} M \epsilon(U) = 0 & \text{ds } \Omega \\ M \epsilon(U) = 0 & \text{sur } \Gamma_F \\ U = \bar{U} & \text{sur } \Gamma_D \end{array} \right.$$

on a alors la formule de Green généralisée :

$$\int_{\Omega} \sigma : \epsilon(u - U) = \int_{\Omega} F \cdot (u - U) + \int_{\Gamma_F} T \cdot (u - U)$$

Dans le même esprit, on peut aussi définir $u \cdot \sigma \cdot n$
 en tant qu'élément de $C'(\partial\Omega)^*$ par :

$$\begin{aligned} \langle u \cdot \sigma \cdot n, \varphi \rangle &:= \int_{\Omega} \sigma : \epsilon(u) \varphi + \int_{\Omega} F \cdot u \varphi \, d\mathcal{H}^n \\ &\quad + \int_{\Omega} \sigma \cdot (u \otimes \operatorname{grad} \varphi) \, d\mathcal{H}^n \end{aligned}$$

pour $\varphi \in C'(\bar{\Omega})$.

Concluons par le fait que le minimiseur satisfait bien les équations locales.

Sous les hypothèses du théorème de Temam,

$$\text{soit } u \in \{ u \in BD(\Omega) \mid m \cdot u|_{\Gamma_0} = m \cdot U|_{\Gamma_0} \}$$

$$\text{et } \sigma \in \left\{ \sigma \in L^2(\Omega; M_0^{n \times n}) \mid \forall h \in H^1(\Omega) \text{ avec } h|_{\Gamma_0} = 0 \quad \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(h) = \int_{\Omega} F(h) \int_{\Gamma_f} T \cdot h \right. \\ \left. \text{et } \sigma_D \in K_D \text{ p.p.t. } x \in \Omega \right\}$$

Alors u est solution de $\overline{P}$ et σ est solution de P^* si et seulement si :

$$(i) \quad j_D(\varepsilon_D) + \frac{1}{4\mu} \sigma_D : \sigma_D = \sigma_D : \varepsilon_D(u) \quad \text{ds } \Omega$$

$$(ii) \quad \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \operatorname{div} u = \frac{1}{N} \operatorname{tr} \sigma \quad \text{ds } \Omega$$

$$(iii) \quad H_K \left[\left((U_t - u_t) \otimes \nu_n \right)_D \right] = (U_t - u_t) \cdot (\sigma_n)_t \quad \text{sur } \Gamma_0$$

$$(i) \text{ est en fait } j_D(\varepsilon_D) + j_D^*(\sigma_D) = \sigma_D : \varepsilon_D$$

$$\Leftrightarrow \sigma_D \in \partial j_D[\varepsilon_D] \Leftrightarrow \varepsilon_D \in \partial j_D^*[\sigma_D]$$

(iii) est la forme relaxée de la condition à la limite.