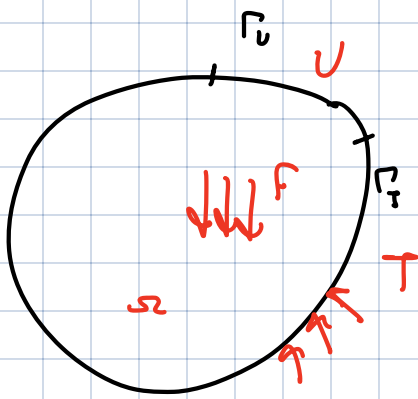




Trouver u, e, p, σ fonctions du temps
telles que :

$$\operatorname{div} \sigma + F = 0$$

$$\varepsilon(u) = e + p$$

$$\sigma = \mathbb{M} e$$

$$\sigma \in K \quad \text{et} \quad \forall \sigma^* \in K \quad (\sigma^* - \sigma) : \dot{p} \leq 0$$

$$u = U$$

$$\text{sur } \Gamma_U$$

$$\sigma \cdot n = T$$

$$\text{sur } \Gamma_T$$

dans Ω

C.I. +

Hypothèses.

- $\mathbb{M}$ homogène, isotrope (pour simplifier)

$$\mathbb{M} e = \lambda \operatorname{tr} e \mathbb{1} + 2\mu e$$

$$\text{avec } 3\lambda + 2\mu > 0 \quad \text{et} \quad \mu > 0$$

ce qui est suffisant pour garantir:

- $\forall e \in M_s^{N \times N} \setminus \{0\}, \quad e : \mathbb{M} e > 0$
- $e_1 : \mathbb{M} e_2 = e_2 : \mathbb{M} e_1$

- On note $M_s^{N \times N}$ les matrices symétriques de trace nulle. On munit $M_s^{N \times N}$ du produit scalaire

$$e : f = e_{ij} f_{ji}$$

et on note $|e|$ la norme associée :

$$|e| = \sqrt{e_{ij} e_{ji}}$$

$M_D^{N \times N}$ et $\mathbb{R} \underline{1}$ sont $\perp$ pour ce produit scalaire.

On pose :

$$\sigma_D := \sigma - \frac{1}{N} (\text{tr } \sigma) \underline{1} \quad (\Rightarrow \sigma_D : \underline{1} = 0)$$

- Le convexe de plasticité est de la forme :

$$K := \{ \sigma \in M_D^{N \times N} \mid \sigma_D \in K_D \}$$

où K_D est un convexe fermé borné donné de $M_D^{N \times N}$ contenant 0 dans son intérieur.

Bref, on prend un critère de plasticité incompressible à la pression. Ce cadre contient par exemple les critères usuels de Tresca ou Von Mises.

- Ω est pris C^2 (pas obligatoire, pour simplifier).
- Pour l'instant, on suppose comme dans le cas de l'élasticité que :

$$\forall t \quad F(t) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

$$\forall t \quad T(t) \in L^2(\Gamma_T; \mathbb{R}^N)$$

$$\forall t \quad U(t) \in H^{1/2}(\Gamma_U; \mathbb{R}^N)$$

Il restera à préciser la régularité de la dépendance au temps de ces fonctions.

① Problème d'évolution fermé pour la contrainte

On introduit l'ensemble $C(t)$ des champs de contrainte statiquement et plastiquement admissibles:

$$C(t) = \left\{ \sigma \in L^2(\Omega) \mid \forall h \in H^1(\Omega) \text{ avec } h|_{\Gamma_D} = 0, \right.$$

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(h) = \int_{\Omega} F(t) \cdot h + \int_{\Gamma_T} T(t) \cdot h$$

$$\text{et p.p.t. } x \in \Omega \quad \sigma_D(x) \in K_D \quad \left. \vphantom{\int_{\Omega}} \right\}$$

On a alors:

$$\forall t \quad \sigma(t) \in C(t)$$

$$\Lambda^{-1} \dot{\sigma}(t) = \varepsilon(\dot{u}(t)) - \dot{\rho}$$

$$\varepsilon(u) := \frac{1}{2} (\nabla u + {}^t \nabla u)$$

Il en résulte que:

$$\forall \sigma^* \in C(t) \quad \int_{\Omega} \dot{\sigma} : \Lambda^{-1} (\sigma^* - \sigma) \geq \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma) : \varepsilon(\dot{u})$$

" $\sigma^* - \sigma$ si $\dot{u} = 0$

ça veut dire que si on munit $L^2(\Omega; H_D^{N \times N})$ du produit scalaire:

$$\sigma_1, \sigma_2 \rightarrow \int_{\Omega} \sigma_1 : \Lambda^{-1} \sigma_2$$

$$\text{et } \dot{u} = 0, \text{ alors } -\dot{\sigma} \in N_{C(t)}[\sigma(t)]$$

$$\text{où } N_{C(t)}[\sigma(t)] := \left\{ \tau \in L^2(\Omega; M_s^{N \times N}) \mid \forall \sigma^* \in C(t) \int_{\Omega} \tau : \Lambda'(\sigma^* - \sigma) \geq 0 \right\}$$

est le cône normal à $C(t) \subset L^2(\Omega; M_s^{N \times N})$ au champ $\sigma(t) \in L^2(\Omega; M_s^{N \times N})$.

La condition $\dot{p}(t, x) \in N_K[\sigma(t, x)]$ est une condition ponctuelle et N_K est le cône normal dans l'espace vectoriel de dimension finie $M_s^{N \times N}$.

Dans le cas général où $\dot{U} \neq 0$, on introduit $\Sigma(t)$ la solution en contrainte du problème élastique:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall u \in H^1(\Omega) \quad u|_{\Gamma_0} = 0 \quad \int_{\Omega} \Sigma(t) : \varepsilon(u) = 0 \\ \quad \quad \quad (\text{i.e. div } \Sigma = 0 \text{ ds } \Omega \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \Sigma : m = 0 \text{ sur } \Gamma_f) \\ \exists w(t) \in H^1(\Omega) \quad \Sigma(t) = \Lambda \varepsilon(w(t)) \\ \text{et} \quad w(t)|_{\Gamma_0} = U(t) \end{array} \right.$$

$$\text{On pose} \quad \sigma_{\Sigma}(t) = -\Sigma(t) + \sigma(t) \quad \text{et} \quad C_{\Sigma}(t) = \{-\Sigma(t)\} + C(t)$$

On a alors:

$$\sigma_{\Sigma}(t) \in C_{\Sigma}(t)$$

$$\forall \sigma^* \in C(t) \quad \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{\Sigma} : \Lambda'(\sigma^* - \sigma_{\Sigma}) \geq \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_{\Sigma}) : \varepsilon(\dot{u} - \dot{U})$$

0

Formellement, le problème d'évolution pour le champ de contrainte $\sigma(t, x)$ est le suivant.

Étant donné $C(t)$ convexe, fermé, non vide de $L^2(\Omega; \mathcal{H}_s^{n \times n})$ dépendant du temps, trouver $\sigma: [0, T] \rightarrow L^2(\Omega; \mathcal{H}_s^{n \times n})$ tel que :

$$\sigma(0) = \underbrace{\sigma_0}_{\text{donné}} \in C(0) \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T] \quad \left| \begin{array}{l} \sigma(t) \in C(t) \\ -\dot{\sigma}(t) \in N_{C(t)}[\sigma(t)] \end{array} \right.$$

Ce problème d'évolution multivoque a été étudié en détail par MOREAU sous le nom de "Processus de balayage par un convexe mobile" (sweeping process).

Exemple du bol renversé et de la pièce de monnaie.

Notons qu'il a au plus une solution "absolument continue" en temps.

En effet, si σ_1 et σ_2 sont deux solutions AC on a :

$$\forall t \in [0, T] \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\sigma_1(t) - \sigma_2(t)] : \mathcal{H}'[\sigma_1(t) - \sigma_2(t)] = \int_0^t \int_{\Omega} (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2) : \mathcal{H}'(\sigma_1 - \sigma_2) \leq 0$$

$\Rightarrow$ unicité de la contrainte $\sigma(t, x)$ en plasticité.

En fait, la nature profonde du cône normal est d'être le gradient d'un potentiel. D'ailleurs, au lieu de noter $-\dot{\sigma} \in N_C[\sigma]$, MOREAU utilise la notation $-\dot{\sigma} \in \partial I_C[\sigma]$ qui renvoie à la Dualité de Legendre-Fenchel.

② Dualité de Legendre - Fenchel

Soit B un espace de Banach et une fonction

$$\phi : B \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

- ϕ est dite "propre" si $\phi \not\equiv +\infty$
- ϕ est dite convexe si elle est en-dessous de l'une quelconque de ses cordes:

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad \forall x, y \in B \quad \phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \phi(x) + (1-\lambda)\phi(y)$$

- Si B est de dimension finie, les fonctions convexes sont continues en tout point intérieur à leur domaine

$$D(\phi) := \{x \in B \mid \phi(x) < +\infty\}$$

Attention, ce n'est pas vrai en général si B est de dimension infinie.

- Elles ne sont pas forcément dérivables (penser à la valeur absolue) mais admettent des dérivées directionnelles dans toutes les directions.

- On appelle sous-différentiel de ϕ en x , notation $\partial\phi[x]$ l'ensemble des "pentes" de toutes les minorantes affines passant par $(x, \phi(x))$:

$$\partial\phi[x] := \{\xi \in B^* \mid \forall y \in B, \phi(y) \geq \phi(x) + \langle \xi, y-x \rangle\}$$

Clairément : $x = \arg \min_{x^* \in B} \phi(x^*) \Leftrightarrow 0 \in \partial \phi[x]$

On appelle fonction conjuguée, ou duale au sens de Legendre-Fenchel, la fonction $\phi^*: B^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la fonction $\phi^*: B^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$\phi^*(y) := \sup_{x^* \in B} \{ \langle y, x^* \rangle - \phi(x^*) \}$$

En tant que supremum d'une collection de fonctions convexes, s.c.i., ϕ^* est elle-même convexe, s.c.i. :

Moreau a montré que si ϕ est convexe, s.c.i., alors :

$$\phi^{**}(x) := \sup_{y^* \in B^*} \{ \langle x, y^* \rangle - \phi^*(y^*) \} = \phi(x)$$

Par définition, on a :

$$\forall x \in B \quad \forall y \in B^* \quad \phi(x) + \phi^*(y) \geq \langle x, y \rangle$$

Étudions les cas d'égalité :

$$\text{égalité} \Leftrightarrow \phi^*(y) = \max_{x^* \in B} \{ \langle x^*, y \rangle - \phi(x^*) \}$$

$$\Leftrightarrow x = \arg \min_{x^* \in B} \{ \phi(x^*) - \langle x^*, y \rangle \}$$

$$\Leftrightarrow 0 \in \partial \phi[x] - \{y\}$$

$$\Leftrightarrow y \in \partial \phi[x]$$

En résumé,

$$\phi(x) + \phi^*(y) = \langle x, y \rangle \Leftrightarrow y \in \partial \phi[x] \Leftrightarrow x \in \partial \phi^*[y]$$

Dans le cas de lois de comportement multivoques associées à des sous-différentiels de fonctions convexes (c'est-à-dire des gradients généralisés de potentiels), la dualité de Legendre-Fenchel sert à inverser ces lois.

Exemple 1 $\phi(\varepsilon) := \frac{1}{2} \varepsilon : \Lambda \varepsilon \quad \Lambda > 0$
 $\phi^*(\sigma) := \frac{1}{2} \sigma : \Lambda^{-1} \sigma$

Exemple 2 Soit C un convexe fermé non vide. On pose:

$$I_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

$$C \neq \emptyset \iff I_C \not\equiv +\infty$$

$$C \text{ fermé} \iff I_C \text{ s.c.i.}$$

$$\partial I_C[x] := \begin{cases} N_C[x] & \text{si } x \in C \\ \emptyset & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

$$H_C(y) := \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle = I_C^*$$

est appelée fonction d'appui de C .

C'est une fonction convexe, positivement

homogène de degré 1:

$$\forall \lambda \geq 0 \quad H(\lambda x) = \lambda H(x)$$

qui satisfait donc l'inégalité triangulaire:

$$H(x+y) \leq H(x) + H(y)$$

Si C est la boule unité fermée de rayon R :

$$H(y) = R \|y\|^*$$

On a alors (faiblement dans $H^{N \times N}$):

$$\dot{\rho} \in \partial I_K(\sigma) \Leftrightarrow \sigma \in \partial H_K(\dot{\rho}) \subset K$$

$$\Leftrightarrow \sigma : \dot{\rho} = \underbrace{H_K(\dot{\rho})}_{\text{dissipation plastique}} + \underbrace{I_K(\sigma)}_{0}$$

Exemple 3

Si on "régularise" I_K par:

$$J_K(\sigma) := \frac{1}{2\eta} [\text{dist}(\sigma, K)]^2$$

la loi $\dot{\rho} \in \partial J_K(\sigma)$ devient:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\eta} [\sigma - \text{proj}(\sigma; K)]$$

C'est la loi visco-plastique de Perzyna.

$$J_K^*(\dot{\rho}) = \underbrace{H_K(\dot{\rho})}_{\text{croissance linéaire à l'infini}} + \underbrace{\frac{\eta}{2} |\dot{\rho}|^2}_{\text{croissance quadratique}}$$

croissance linéaire
à l'infini

croissance quadratique

En plasticité parfaite, on verra que p est en général une mesure (à cause de la croissance linéaire à l'infini) qui peut avoir des parties singulières localisées sur des hyper-surfaces.

En viscoplasticité, le potentiel ressemble à celui de l'élasticité (croissance quadratique) et :

$$p \in H^1$$

Il n'y a donc pas de bande de cisaillement "sharp" en viscoplasticité.

③ Problèmes variationnels en dualité et théorème de Fenchel-Rockafellar

Soit $\phi, \psi : B \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes, s.c.i., propres définies sur un espace de Banach B .

On note $\phi^*, \psi^* : B^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ leurs transformées de Legendre-Fenchel.

On a :

$$\forall (u, f) \in B \times B^* \quad [\phi(u) + \psi(u)] + [\phi^*(f) + \psi^*(-f)] \geq 0$$

La somme des infimums est plus grande que 0.
 Sous des conditions minimales, cette somme est 0 et un des infimums est un minimum.

THEOREME [FENCHEL - ROCKAFELLAR]

On suppose qu'il existe u_0 tq $\phi(u_0) < \infty$, $\psi(u_0) < \infty$
 et ϕ continue en u_0 alors:

$$\underbrace{\inf_{u \in B} [\phi(u) + \psi(u)]}_{\in [-\infty, +\infty[} + \underbrace{\min_{f \in B^*} [\phi^*(f) + \psi^*(-f)]}_{\in]-\infty, +\infty]} = 0$$

Le problème dual a un minimum et les infima sont opposés.

REMARQUE

Dans le cas particulier où le problème primal a un minimum u , on a:

$$\phi(u) + \psi(u) + \phi^*(f) + \psi^*(-f) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{qui entraîne } \phi(u) + \phi^*(f) &= \langle u, f \rangle \\ \psi(u) + \psi^*(-f) &= -\langle u, f \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et donc : } f &\in \partial \phi[u] & -f &\in \partial \psi[u] \\ u &\in \partial \phi^*[f] & u &\in \partial \psi^*[-f] \end{aligned}$$

Les formulations variationnelles de l'élasticité linéaire entrent dans ce cadre, avec $B = L^2(\Omega; M_0^{N \times N}) = B^0$

$$\bullet \quad \phi(\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon : M \varepsilon$$

$$\bullet \quad \psi(\varepsilon) := \begin{cases} - \int_{\Omega} F \cdot u(\varepsilon) - \int_{\Gamma_T} T \cdot u(\varepsilon) \\ + \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \text{si } \exists u \in H^1, u|_{\Gamma_U} = U \\ \varepsilon(u) = \varepsilon \end{cases} \quad \text{sinon}$$

$$\bullet \quad \phi^*(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : M^{-1} \sigma$$

$$\bullet \quad \psi^*(\sigma) := \begin{cases} \int_{\Gamma_U} U \cdot \sigma \cdot n \\ + \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \text{si } -\operatorname{div} \sigma + F = 0 \text{ ds } \Omega \\ \text{et } -\sigma \cdot n = T \text{ sur } \Gamma_T \end{cases} \quad \text{sinon.}$$

On a vu que dans ce cas particulier,

$$\phi(\varepsilon) + \psi(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \phi^*(\sigma) + \psi^*(-\sigma)$$

ont chacune un minimiseur unique et que les infima sont bien opposés. Dans le prochain cours, on verra que la plasticité de Hencky peut aussi rentrer dans ce cadre. Le problème dual (le problème en contrainte) a alors un minimiseur unique dans $L^2(\Omega; M_0^{N \times N})$, alors que l'infimum du problème primal (en déplacement) n'est en général pas atteint dans $H^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ ($\Leftrightarrow \varepsilon \in L^2$).

④ Discretisation en temps du sweeping process.

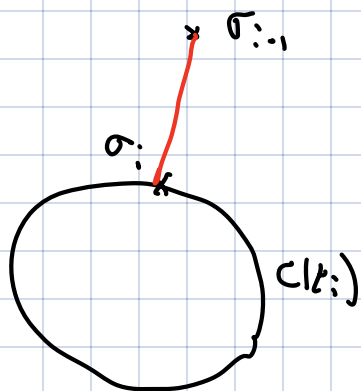
Le sweeping process :

$$\sigma(0) = \sigma_0 \quad - \quad \dot{\sigma}(t) \in \partial I_{C(t)}[\sigma(t)]$$

est un exemple archétypal de "rate-independent process", c'est-à-dire, invariant par reparamétrage monotone du temps $\alpha: [0, T] \rightarrow [0, S]$ croissante $\Rightarrow \dot{\alpha} > 0$

car $\partial I_{C(t)}[C(t)]$ est un cône $\Rightarrow \dot{\alpha} \partial I_C[\alpha] = \partial I_C[\alpha]$

Utilisation d'un schéma de discrétisation en temps de type "Euler implicite" :



$$-(\sigma_i - \sigma_{i+1}) \in \partial I_{C(t_i)}[\sigma_i]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sigma_{i+1} \in \{ \sigma_i \} + \partial I_{C(t_i)}[\sigma_i]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sigma_i = \text{Proj}[\sigma_{i+1}, C(t_i)] = \arg \min_{\sigma^* \in C(t_i)} \|\sigma^* - \sigma_{i+1}\|_{L^2}^2$$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{en effet} & \forall \sigma^* \in C(t_i) \quad (\sigma_{i+1} - \sigma_i, \sigma_i - \sigma^*)_{L^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \forall \sigma^* \in C(t_i) \quad \|\sigma_{i+1} - \sigma_i\|_{L^2}^2 \leq (\sigma_{i+1} - \sigma_i, \sigma_{i+1} - \sigma^*)_{L^2} \\ \Leftrightarrow & \forall \sigma^* \in C(t_i) \quad \|\sigma_{i+1} - \sigma_i\|_{L^2}^2 \leq \|\sigma_{i+1} - \sigma^*\|_{L^2}^2 \end{array} \right)$$

Donc que $C(t)$ est non-vide pour tout t (attention, ce n'est pas garanti), il existe toujours une solution du problème discrétisé en temps.

La question est de savoir si elle converge (dans un sens approprié), quand le pas de temps tend vers 0, vers une solution de:

$$\sigma(0) = \sigma_0 \quad - \quad \dot{\sigma}(t) \in \partial I_{C(t)}[\sigma(t)]$$

Rappelons qu'il ne peut y avoir qu'au plus une solution "dérivable en temps", car:

$$\forall t \quad \int_0^t (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2, \sigma_1 - \sigma_2)_{L^2} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall t \quad \|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_{L^2}^2 \leq 0$$

À cause du caractère "rate-indépendent", le cadre naturel est celui des:

⑤ Fonctions du temps à variation bornée.

Soit $f: [0, T] \rightarrow B$ espace de Banach (ça peut être $\mathbb{R}$)

On considère les subdivisions finies de $[0, T]$:

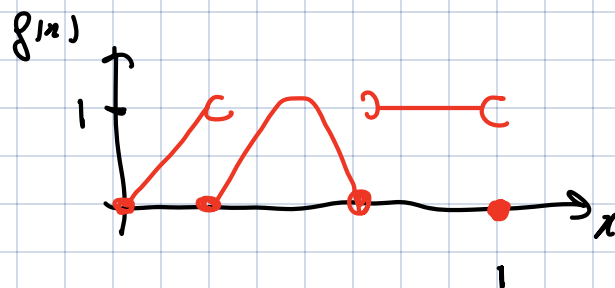
$$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_m \leq T$$

On pose:

$$\text{var}(f; [0, T]) := \sup_{\dots} \sum_{i=1}^m \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

le sup étant pris sur toutes les subdivisions de $[0, T]$.

Exemple



$$\text{var}(f; [0, 1]) = 6$$

On pose $BV([0, T]; B) := \{f: [0, T] \rightarrow B \mid \text{var}(f, [0, T]) < \infty\}$

Muni de la norme:

$$\|f\|_{BV} := \|f(0)\|_B + \text{var}(f; [0, T])$$

c'est un espace de Banach.

On a:

$$\forall t_1 \leq t_2 \leq t_3 \quad \text{var}(f; [t_1, t_2]) + \text{var}(f; [t_2, t_3]) = \text{var}(f; [t_1, t_3])$$

Donc, la fonction:

$$v: \begin{cases} [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto \text{var}(f; [0, t]) \end{cases}$$

est croissante. Comme toute fonction croissante, elle a une limite à gauche $v(s-)$ et à droite $v(s+)$ pour tout $s \in]0, T[$. Ces limites sont égales sauf en un nombre au plus dénombrable d'instants $s \in [0, T]$.

Comme:

$$\|f(s_2) - f(s_1)\|_B \leq \text{var}(f; [s_1, s_2]) = v(s_2) - v(s_1)$$

f satisfait le critère de Cauchy à gauche et à droite en tout s . Donc f a aussi une limite à gauche

et à droite en tout a : $f(a-) \neq f(a+)$

Car on a $f(a+) = f(a) \Leftrightarrow v(a+) = v(a)$

$$f(a) = f(a-) \Leftrightarrow v(a) = v(a-)$$

L'ensemble de discontinuité éventuel de f est au plus dénombrable.

Les fonctions à variation bornée sont étroitement liées aux mesures.

⑥ Théorie de la mesure sur $\mathbb{R}^N$.

- Une collection d'ensembles dans $\mathbb{R}^N$, contenant $\mathbb{R}^N$, est une σ -algèbre si elle est stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable.
- Étant donné une collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$, l'intersection de toutes les σ -algèbres la contenant est encore une σ -algèbre : c'est la σ -algèbre engendrée par cette collection d'ensembles.
- Soit $\mathcal{O}$ l'unique topologie d'espace normé de $\mathbb{R}^N$. La σ -algèbre qu'elle engendre est la σ -algèbre des ensembles Boreliens qui seront appelés ensembles

mesurables dans la suite.

Une mesure réelle bornée sur un ensemble Ω est une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$ qui est dénombrablement additive sur les sous-ensembles Boreliens de Ω :

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$$

pour toute collection dénombrable d'ensembles disjoints.

- Pour toute mesure réelle bornée μ sur un ensemble Ω , on définit:

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=0}^{\infty} |\mu(E_i)|$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions dénombrables de E .

Théorème

$|\mu|(\Omega) < \infty$ et $|\mu|$ est une mesure positive bornée sur Ω .

On l'appelle mesure de variation totale de μ ou bien valeur absolue de μ .

On a clairement: $\forall E \subset \Omega \quad |\mu(E)| \leq |\mu|(E)$

Soit $X \subset \mathbb{R}^N$ un sous-ensemble localement compact (tout point a un voisinage compact).

Pour μ mesure bornée sur X et $\varphi \in C_c^0(X)$, la théorie de l'intégrale de Lebesgue permet de définir la forme linéaire:

$$\varphi \longmapsto \int_X \varphi d\mu$$

qui est continue au sens:

$$\left| \int_X \varphi d\mu \right| \leq \max_X |\varphi| \underbrace{|\mu|(X)}_{\int_X d|\mu|}$$

Le théorème de représentation de Riesz affirme la réciproque: toute forme linéaire $L\varphi$ sur $C_c^0(X)$ continue au sens où:

$$|L\varphi| \leq C \max_X |\varphi|$$

est associée à une mesure bornée μ sur X tq:

$$\forall \varphi \in C_c^0(X), \quad L\varphi = \int_X \varphi d\mu$$

En résumé, on peut voir les mesures bornées sur X ,

- soit comme des fonctions dénombrablement additive d'ensembles: $\mu(E) = \int_E d\mu$

- soit comme des formes linéaires continues sur l'espace des fonctions continues à support compact, ce qui les caractérise complètement.

Exemples

- Il existe une unique mesure sur $\mathbb{R}^N$ qui à chaque parallélépipède associe son volume, ainsi qu'à chaque image d'un parallélépipède par une isométrie directe : c'est la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^N$.

$\mathcal{L}^N(E)$ est le volume de E

$\int_X \varphi d\mathcal{L}^N$ est l'intégrale 'habituelle' de la fonction continue à support compact φ .

- La mesure de Dirac en $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in E \\ 0 & \text{si } x_0 \notin E \end{cases}$$

$$\int_X \varphi d\delta_{x_0} = \varphi(x_0)$$

- Soit $\varphi \in C_c^0(X)$ avec $\varphi \geq 0$. Pour "visualiser" $|\mu|$:

$$\int_X \varphi d|\mu| = \sup_{\substack{\theta \in C_c^0(X) \\ |\theta| \leq \varphi}} \int_X \theta d\mu$$

On en déduit:

$$|\delta_{x_0} - \delta_{y_0}| = \begin{cases} \delta_{x_0} + \delta_{y_0} & \text{si } x_0 \neq y_0 \\ 0 & \text{si } x_0 = y_0 \end{cases}$$

- Le "segment de Dirac" sur le segment $[-1, 1]$ de la première coordonnées dans $\mathbb{R}^N$.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu = \int_{-1}^1 \varphi(x, 0, \dots, 0) dx$$

$\mu(E)$ est la "longueur" de l'intersection de E avec ce segment.
mesure de Lebesgue 1d.

Le théorème de Riesz dit essentiellement 2 choses très importantes.

1. La notion de mesure est une généralisation de la notion de fonction, comme le sont les distributions. Mais les mesures constituent une généralisation 'moins générale'.

2. On note $C_0(X)$, l'espace de Banach des fonctions continues de $X \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\{ |f| \geq \varepsilon \}$ est compact dans X pour tout $\varepsilon > 0$, muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{C_0^*} := \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$$

Alors l'espace $\mathcal{M}_b(X)$ des mesures bornées sur X s'identifie au dual de C_0 :

$$\mathcal{M}_b(X) = C_0^* \quad \text{et} \quad \|\mu\|_{\mathcal{M}_b} = \int_X d|\mu|$$

Comme C_0 est séparable (les fonctions constantes par morceaux sur des rectangles rationnels et à valeurs rationnelles sont denses), il en résulte que de toute suite bornée μ^n dans $\mathcal{M}_b(X)$, on peut extraire une sous-suite faiblement étièle convergente

$$\mu^{(n)} \xrightarrow{*} \mu \iff \forall \varphi \in C_0(X), \quad \int_X \varphi d\mu^{(n)} \rightarrow \int_X \varphi d\mu$$

DEFINITION

Soit λ une mesure positive et μ une mesure bornée.

- on dit que μ est absolument continue par rapport à λ (notation $\mu \ll \lambda$) si :

$$\forall E \text{ tq } \lambda(E) = 0, \quad \mu(E) = 0$$

- On dit que μ est concentrée sur S si :

$$\forall E \quad \mu(E) = \mu(E \cap S)$$

- On dit que μ_1 et μ_2 sont étrangères entre elles (notation $\mu_1 \perp \mu_2$) si elles sont concentrées sur 2 ensembles disjoints.

Exemples

- Un point est de mesure de Lebesgue nulle :
 $\mathcal{L}^N \perp \delta_{x_0}$
- Soit $f \in L^1$: $f \mathcal{L}^N \ll \mathcal{L}^N$
- Pour toute mesure bornée $\mu \ll |\mu|$
car $|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$ par définition.

THEOREME (Lebesgue - Radon - Nikodym)

Soit μ une mesure bornée sur une partie X localement compacte de $\mathbb{R}^N$ et λ une mesure positive σ -finie.

- Il existe une unique décomposition

$$\mu = \mu_a + \mu_s$$

$$\text{où } \mu_a \ll \lambda \text{ et } \mu_s \perp \lambda$$

Ce sont les parties absolument continues et singulières de μ , par rapport à la mesure de base λ (ce sera le plus souvent $\mathcal{L}^N$).

- $\exists ! f \in L^1(X, \lambda)$, tq $\mu_a(E) = \int_E f d\lambda$

On dit que f est la dérivée de Radon-Nikodym (notation $f = \frac{d\mu_a}{d\lambda}$).

⑧ Décomposition de Radon-Nikodym des mesures sur $\mathbb{R}$

soit $g \in BV([0, T])$ et $\varphi \in C^0([0, T])$.

des sommes de Riemann-Stieltjes:

$$\sum_{i=1}^N \varphi(t_i) [g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

convergent vers une limite notée $\int_{[0, T]} \varphi dg$ et on a:

$$\left| \int_{[0, T]} \varphi dg \right| \leq \max_{[0, T]} |\varphi(t)| \operatorname{var}(g; [0, T])$$

Cela montre que dg définit une mesure sur $[0, T]$.

Comme:

$$\forall \varphi \in C_c^1(\mathcal{I}_{0, T}[), \quad \int_{[0, T]} \varphi dg = - \int_0^T \dot{\varphi}(t) g(t) dt$$

cela montre que $dg = \dot{g}$ est la dérivée-distribution de g :

les fonctions BV de $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ont toutes une dérivée distribution qui est une mesure, et $\operatorname{var}(g; [0, T]) = \int_{[0, T]} |\dot{g}|$

Du coup, en dimension ≥ 2 , les fonctions BV sont définies comme les fonctions dont les dérivées partielles au sens des distributions sont des mesures.

$\dot{g}$ a un atome en $t \in \mathcal{I}_{0, T}[$ (c'est-à-dire $\dot{g}(\{t\}) \neq 0$)

si et seulement si $g(t+) \neq g(t-)$ et on a:

$$\dot{g}(\{t\}) = g(t+) - g(t-)$$

Par Lebesgue-Radon-Nikodym :

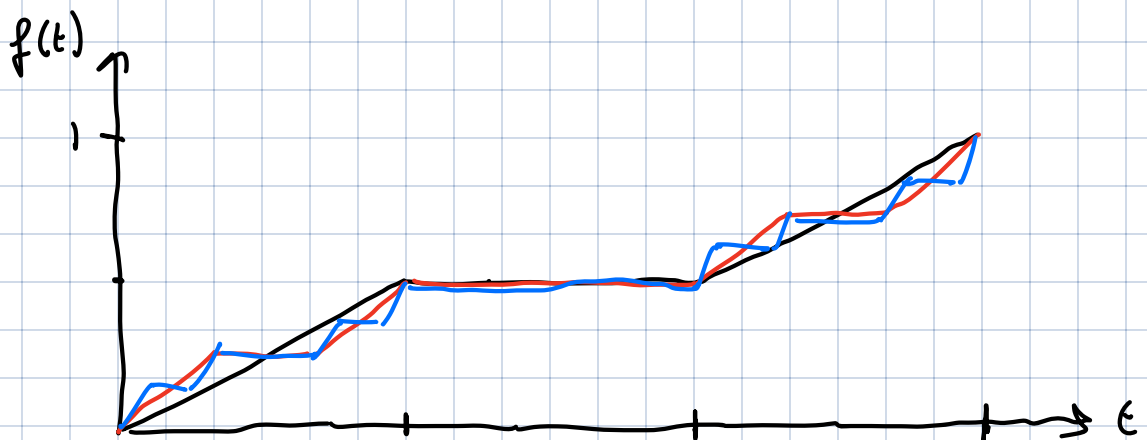
$$\dot{f} = \bar{f} dt + \mu_s$$

On montre qu'une fonction croissante (respectivement à variation bornée) est dérivable presque partout et $\bar{f}$ coïncide avec la dérivée presque partout de f . μ_s a un atome $f(t+) - f(t-)$ à chaque saut de f .

On aurait pu espérer que μ_s se réduise à la somme dénombrable des atomes $\sum_t [f(t+) - f(t-)] \delta_t$.

Mais, 'malheureusement', il peut y avoir autre chose en plus (la 'partie Cantor') à cause du fait qu'il existe des ensembles Lebesgue-négligeables qui ne sont pas dénombrables.

Exemple : l'escalier de Cantor.



Cette suite de fonctions continues croissantes

converge uniformément vers une fonction continue croissante (qui est donc BV).

Sa dérivée presque-partout est identiquement nulle et on a:

$$1 = g(1) - g(0) \neq \int_0^1 \bar{g}(t) dt = 0$$

La dérivée-distribution de g est une mesure singulière (concentrée sur un ensemble de mesure nulle) sans atome (car g est continue).

l'ensemble triadique de Cantor. Il est de mesure nulle et son image par g est $[0,1]$.

On a donc en général:

$$\dot{g} = \bar{g} dt + \sum_{i=1}^{\infty} [g(a_i+) - g(a_i-)] \delta_{a_i} + \text{"partie Cantor"}$$

DEFINITION

On dit g est absolument continue (AC) si:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0$ tq pour toute suite $[a_n, b_n]$

d'intervalles d'intérieurs disjoints:

$$\sum_{n \geq 0} (b_n - a_n) < \eta \Rightarrow \sum_{n \geq 0} |g(b_n) - g(a_n)| < \varepsilon$$

Toute fonction AC est BV, et:

$$g \text{ AC} \Leftrightarrow t \mapsto \text{var}(g; [0, t]) \text{ AC}$$

Dire que g est AC est équivalent à dire que:

- $\dot{g}$ se réduit à sa partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ou bien
- la dérivée-distribution de g est une fonction intégrable.

⑨ Retour sur l'existence de solution du processus de naffe.

Pour simplifier, on se place dans le cas $U \equiv 0$. Si ce n'était pas le cas, on pourrait aussi traiter en utilisant le décalage d'inconnue décrit plus haut.

On se donne $F : [0, T] \rightarrow L^N(\Omega; \mathbb{R}^N)$

$T : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma; \mathbb{R}^N)$

les espaces d'arrivée
seront expliqués par
l'étude du problème
en déplacement -

et on note $C(t) \subset L^2(\Omega; H^{N \times N})$ l'ensemble des contraintes statiquement et plastiquement admissibles :

$$C(t) := \left\{ \sigma \in L^2(\Omega; H^{N \times N}) \mid \begin{array}{l} \forall u \in H^1(\Omega) \\ u|_{\Gamma_0} = 0 \end{array} \int_{\Omega} \sigma : E(u) = \int_{\Omega} F \cdot u + \int_{\Gamma} T \cdot u \right.$$

$$\left. \text{p.p.t. } z \in L^2 \quad \sigma_D(\sigma) \subset K \right\}$$

On suppose que K contient un voisinage de 0 et est bornée :

$$\{ \tau \in M_D^{n \times n} \mid |\tau| \leq \eta_K \} \subset K \subset \{ \tau \in M_D^{n \times n} \mid |\tau| \leq R_K \}$$

Si K est convexe fermé dans $M_s^{n \times n}$, alors $C(t)$ est convexe fermé dans $L^2(\Omega; M_s^{n \times n})$

Le problème est qu'il peut être vide (même si $P \neq \emptyset$).
Si les efforts intérieurs sont trop intenses, il peut ne pas exister de champ de contrainte à la fois statiquement et plastiquement admissible.

Qualifions les efforts extérieurs appliqués pour lesquels $C(t) \neq \emptyset$

est l'objet de l'analyse limite. On ne peut évidemment imaginer construire des solutions au problème élasto-plastique quasi-statique que s'il existe des champs de contrainte plastique et statiquement admissible pour les valeurs du chargement à chaque instant. C'est l'objet de la condition de charge sûre.

Condition de charge sûre

On suppose qu'il existe $p(t) \in C(t)$ et $\alpha > 0$ tq
 $\forall \tau \in M_s^{n \times n}$, avec $|\tau| \leq \alpha$, p.p.t. $x \in \Omega$, $p_D(t, x) + \tau \in K_D$

Cela signifie qu'il existe un champ de contrainte statiquement admissible qui soit partout intérieur à K et se uniformément.

On verra en étudiant le problème variationnel de l'analyse limite que le "uniformément" n'est en fait pas exigeant.

On introduit alors une discrétisation du temps :

$$0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \dots < t_{m_n}^n = T$$

et une solution approchée, en posant :

$$\sigma_0^n = \sigma_0 \quad \sigma_i^n = \text{proj}(\sigma_{i-1}^n, C(t_i^n))$$

$$\max_i |t_i^n - t_{i-1}^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$C^n(t) := \begin{cases} C(t_{i-1}^n) & t \in [t_{i-1}^n, t_i^n[\\ C(T) & t = T \end{cases}$$

$$\sigma^n(t) := \begin{cases} \sigma_{i-1}^n & t \in [t_{i-1}^n, t_i^n[\\ \sigma_{m_n}^n & t = T \end{cases}$$

de sorte que σ^n est une fonction continue à droite, constante par morceaux (donc BV). Elle est une solution exacte du processus de saut associé à C^n au sens où :

$$\text{p. l. } \dot{\sigma}^n - \text{p. l. } t \quad - \frac{d\dot{\sigma}^n}{d|\dot{\sigma}^n|}(t) \in \partial I_{C^n(t)}[\sigma^n(t)]$$

$\uparrow$
dérivée de Radon-Nikodym.

Moreau n'aurait pas réussi à passer à la limite $n \rightarrow \infty$.

Il avait fait la théorie générale des Processus de saut

associés à des $C: [0, T] \rightarrow \mathcal{S}(H)$ BV pour la mesure de Hausdorff, mais sans réussir à montrer que le $C(t)$ de la plasticité n'entraîne dans ce cadre sous la condition de charge sûre (sauf en dimension d'espace égale à 1).

On peut le faire aujourd'hui grâce aux estimations montrées par Dal Maso sur la solution incrémentale du problème en déplacement.

THEOREME [Dal Maso & Rian]

$$\| \sigma^m(t_2) - \sigma^m(t_1) \|_{L^2} \leq C \left(\| \rho(t_2) - \rho(t_1) \|_{L^2} + \| \rho_0(t_2) - \rho_0(t_1) \|_{L^2} \right)$$

où C ne dépend que $R_K, \alpha_C, \beta_C, \nu, \sup_{t \in [0, T]} \| \rho(t) \|_{L^2}$

Si on rajoute l'hypothèse que $\rho: [0, T] \rightarrow L^2$ et $\rho_0: [0, T] \rightarrow \mathcal{M}$ sont BV⁺ (resp. AC, respectivement lipschitziennes) cela entraîne que σ^m est bornée dans $BV([0, T]; H)$:

$$\exists M > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \| \sigma^m \|_{BV} \leq M \quad (*)$$

Ce genre d'estimation permet d'utiliser le théorème de sélection de Helly qui est central dans la théorie des rate-independent processes.

Théorème de Sélection de Helly

Soit $f^n: [0, T] \rightarrow S$ (où S est un espace de Banach)
une suite bornée dans $BV([0, T]; S)$.

- Si S est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^N$, alors il existe une sous-suite extraite f^{n_k} et $f \in BV([0, T]; S)$ γ_f :
$$\forall t \in [0, T] \quad f^{n_k}(t) \rightarrow f(t)$$
- Si S est un Banach réflexif et séparable (par exemple $L^2(\Omega)$ ou $H^1(\Omega)$) alors il existe une sous-suite extraite f^{n_k} et $f \in BV([0, T]; S)$ γ_f :
$$\forall t \in [0, T] \quad f^{n_k}(t) \rightharpoonup f(t) \text{ dans } w.S$$
- Si S est le dual d'un Banach séparable (par exemple $M_b(\Omega)$), alors la conclusion tient encore à condition de remplacer la convergence faible par la convergence faible étoilée.

Par le théorème de Helly, il existe une sous-suite telle que :

$$\forall t \in [0, T] \quad \sigma^{n_k}(t) \rightarrow \sigma(t) \text{ dans } w-L^2$$

où la fonction $\sigma(t)$ est BV , (resp. AC , resp. Lipschitz).

Moreau montre que $\sigma(t)$ est continue à droite et que la convergence faible est forte. De plus, $\sigma(t)$ satisfait :

$$\sigma(0) = \sigma_0 \quad \text{et} \quad \text{p.p.t. } t, \quad -\frac{d\dot{\sigma}}{d|\dot{\sigma}|}(t) \in \partial I_{C(t)}[\sigma(t)]$$

dans le cas B.V. et

$$\text{p.p.t. } t \in [0, T] \quad - \dot{\sigma}(t) \in \partial I_{C(t)}[\sigma(t)]$$

dans les cas AC et Lipschitz.

Si le chargement a des sauts en temps, l'unique solution du processus de raffle saute seulement aux instants où le chargement saute.

Si le chargement est AC (pas de saut), pareil pour la solution : pas de sauts spontanés en temps en plasticité.

ou un pas de
temp.

En résolvant le problème visco-plastique de Perzyna, on peut montrer que sa solution en contrainte σ_η converge vers σ des $w-L^2$ qd $\eta \rightarrow 0$. Comme on peut aussi montrer que σ_η est borné dans H^1_{poc} , on en déduit $\sigma \in H^1_{poc}$. Cela exclut les discontinuités de σ à travers des surfaces.

Synthèse.

Ce champ de contrainte est gouverné par un processus de rafle dont la solution n'a pas de sauts spontanés ni en temps ni en espace.