

Introduction générale

Ce cours concerne l'analyse des équations de l'élasto-plasticité parfaite quasi-statique en transformations infinitésimales.

Formellement, il s'agit de trouver

$$u: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad e: [0, T] \times \Omega \rightarrow M_s^{N \times N}, \quad p: [0, T] \times \Omega \rightarrow M_s^{N \times N}, \\ \sigma: [0, T] \times \Omega \rightarrow M_s^{N \times N} \quad \text{satisfaisant :}$$

- $\operatorname{div} \sigma + F = 0$
- $\varepsilon(u) = e + p$
- $\sigma = \Lambda : e = \lambda \operatorname{tr} e \mathbb{1} + 2\mu e$
- $\sigma \in K$ et $\forall \sigma^* \in K \quad p: (\sigma - \sigma^*) \geq 0$
- $\sigma \cdot n = T$ sur Γ_T
- $u = U$ sur Γ_U

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné, (Γ_T, Γ_U) une partition de son bord et $K \subset M_s^{N \times N}$ un convexe de plasticité donné, contenant $\mathbb{R} \mathbb{1}$ (insensibilité à la pression).

rouge : données

bleu : inconnues

Ce genre d'analyse cherche à définir précisément ce que l'on entend par "solution" pour en montrer l'existence.

Au-delà de la solvabilité du problème, ce que l'on cherche, c'est trouver la structure mathématique sous-jacente. Dans le cas où elle est "intéressante" (et c'est le cas pour la plasticité), elle révèle une phénoménologie spécifique qui ne saute pas aux yeux lorsque l'on regarde les équations.

Lorsqu'on fait ce genre d'analyse, on commence par rechercher le modèle le plus idéalisé possible car c'est lui qui sera le plus à même de révéler la phénoménologie. Ce que l'analyse du modèle le plus idéalisé possible révèle va se retrouver de façon plus ou moins "émoussée" (et donc moins directement perceptible) dans tout modèle "affiné".

Une phénoménologie spectaculaire associée à la plasticité est celle des "bandes de cisaillement" qui sont des localisations de la déformation au voisinage de surfaces (en 3D) ou de lignes (en 2D).

On verra qu'en plasticité parfaite, ces "bandes de cisaillement" se manifestent par l'apparition spontanée de surfaces

de discontinuités tangentielles du champ de déplacement même avec des données aussi régulières que l'on veut. Avec des modèles plus "affines" comme la plasticité avec écrouissage ou la visco-plasticité, ces "bandes de cisaillement" ne sont plus des discontinuités, mais des variations rapides (en espace) du déplacement, localisées près de surfaces.

En ce sens, le modèle idéalisé est plus à même de révéler la phénoménologie spécifique associée à un phénomène physique. L'analyse de l'élastoplasticité parfaite quasi-statique va révéler:

- Le problème n'a pas toujours de solution : les forces appliquées ne doivent pas être "trop intenses".
- Lorsqu'elles existent le champ de contrainte est unique, pas le champ de déplacement, en général.
- Même avec des données très régulières, le champ de déplacement peut exhiber des surfaces de discontinuités tangentielles. Cela ne se produit pas pour la contrainte.

- Pas de discontinuités spontanées en temps :
changement absolument continu $\Rightarrow$ solutions A.C.
Les surfaces de discontinuités peuvent s'étendre
ou se résorber, mais n'ont pas de "mouvement
latéral".

Cette phénoménologie était connue de manière informelle
dans la communauté mécanique par des exemples
de solutions explicites (qui les faisaient apparaître)
ainsi que dans des observations de solutions
numériques.

L'analyse mathématique a permis l'obtention de
formulation cohérente des équations permettant de
les prendre en compte, ainsi que l'explication
de leur origine. L'analyse mathématique s'est nourrie
de la mécanique et est le fait d'autant de personnes
de la communauté mécanique que de la communauté
mathématique. On peut aussi dire que l'analyse
mathématique a rendu tangible et transmissible, ce
que les mécaniciens connaissaient informellement, par expérience.

BIBLIOGRAPHIE

Ordre chronologique. Ce cours s'appuie essentiellement sur les 2 dernières références.

① Jean Jacques MOREAU (1977)

Evolution Problem Associated with a Moving Convex Set in a Hilbert Space.

Journal of Differential Equations, 25, 347-374.

② Pierre SUQUET (1978)

Existence et régularité des solutions des équations de la plasticité

Thèse de 3^{er} cycle.

③ Roger TEMAM (1983)

Problèmes mathématiques en plasticité

Bordas, Paris.

④ Gianni DAL MASO, Antonio DESIMONE, Maria-Giovanna MORA (2006)

Quasi-static Evolution Problems for Linearly Elastic - Perfectly Plastic Materials

Archive for Rational Mechanics and Analysis, 180, 237-291.

Méthodes en Jeu:

- Analyse Convexe
- Analyse Fonctionnelle
- Méthode directe du Calcul des Variations.
- Théorie géométrique de la mesure.

Ce cours porte autant sur ces méthodes que sur la plasticité elle-même.

Ces méthodes peuvent être appliquées à d'autres problèmes d'évolution quasi-statiques sans échelles de temps interne et font apparaître une zoologie de phénoménologie.

- Plasticité
- Rupture fragile
- Contact avec frottement sec
- Endommagement brutal $\leftrightarrow$ Optimisation de forme
- Transitions de phases solide / solide
 $\leftrightarrow$ alliages à mémoire de forme.

Pour la plasticité, la phénoménologie éminente est celle des discontinuités spontanées en espace du champ

de déplacement (bande de cisaillement).

Pas de sauts spontanés en temps pour la plasticité, alors que c'est la situation générale en rupture fragile.

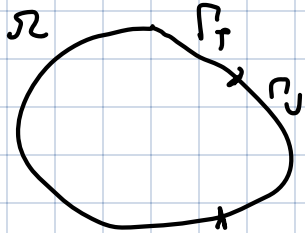
Sauts spontanés en temps $\Leftrightarrow$ transition vers l'excitation spontanée de vibrations (dynamique).

La plasticité est "silencieuse" $\rightarrow$ la rupture est "bruyante"

Le frottement est intermédiaire au sens où il se comporte comme la plasticité pour les petits coefficients de frottement et comme la rupture fragile pour les grands coefficients de frottement (au sens où les solutions des équations quasi-statiques peuvent avoir des sauts spontanés en temps inévitables). L'analyse mathématique a révélé la condition quantitative qui gouverne la transition entre réponses "silencieuse" et "bruyante" pour le frottement.

① Approches variationnelles en élasticité linéarisée

- Ω ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$ dont la régularité est à préciser.



- $\partial\Omega$ son bord.

- $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_T$ partition mesurable.

- Loi de comportement élastique linéarisée.

$$\sigma = \Lambda \varepsilon \quad (\sigma_{ij} = \Lambda_{ijkl} \varepsilon_{kl})$$

Λ symétrique défini positif.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \sigma + F = 0 \\ \sigma = \Lambda \varepsilon(u) \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega$$

$$u = U \quad \text{sur } \Gamma_D$$

$$\sigma n = T \quad \text{sur } \Gamma_T$$

← équations locales formelles.

Ω, Λ, F, T, U données

$$\varepsilon(u) := \frac{1}{2} (\nabla u + {}^t \nabla u)$$

Considérons une solution $u \in C^2$ (restriction à Ω d'une fonction $C_c^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$).

Multipliant les équations par $h \in C^1$, nul sur Γ_D , on a:

$$\forall h \quad h|_{\Gamma_D} = 0 \quad \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \Lambda \varepsilon(h) - \int_{\Omega} F \cdot h - \int_{\Gamma_T} T \cdot h = 0$$

$$\text{où on a utilisé } \int_{\Omega} h_i \sigma_{ij,j} + \int_{\Omega} h_{ij,i} \sigma_{ji} = \int_{\Omega} (h_i \sigma_{ij})_{,j} = \int_{\partial\Omega} h_i \sigma_{ij} n_j$$

(formule de Green aka Ostrogradsky aka Stokes)

Cela conduit à poser:

$$E^P(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \mathbb{A} \varepsilon(u) - \int_{\Omega} F \cdot u - \int_{\Gamma_f} T \cdot u$$

car:

$$E^P(u+h) = E^P(u) + \underbrace{\int_{\Omega} \varepsilon(u) : \mathbb{A} \varepsilon(h) - \int_{\Omega} F \cdot h - \int_{\Gamma_f} T \cdot h}_{dE_u^P(h)} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(h) : \mathbb{A} \varepsilon(h)}_{\geq 0}$$

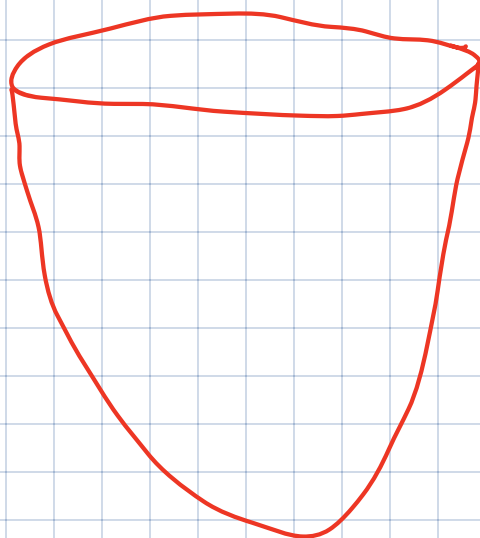
On obtient:

$$\forall h \quad h|_{\Gamma_0} = 0, \quad dE_u^P(h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E^P(u) = \min_v E^P(v)$$

$\Rightarrow$ évident

$\Leftarrow$ Soit u minimiseur et h avec $h|_{\Gamma_0} = 0$. La fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto E^P(u+xh)$ est convexe, dérivable, minimale en 0 $\Rightarrow g'(0) = 0 = dE_u^P(h)$

Cela conduit aux définitions suivantes:



$$E^P(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \mathbb{A} \varepsilon(u) - \int_{\Omega} F \cdot u - \int_{\Gamma_f} T \cdot u$$

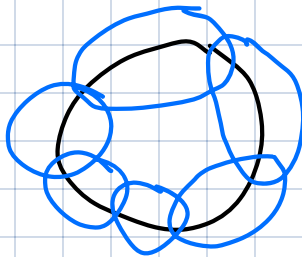
$$CA := \{ u \in ? \mid u|_{\Gamma_0} = 0 \}$$

$$CA_0 := \{ h \in ? \mid h|_{\Gamma_0} = 0 \}$$

et à s'intéresser à la question de l'existence de minimiseurs.

Pour l'étudier, il faut préciser les régularités en jeu.

Régularité de Ω : Ω borné Lipschitzien.



Nombre fini de cartes
découvrant localement Ω
près de son bord, comme

un demi-espace, modulo un homéomorphisme Lipschitzien.

Ω borné Lipschitzien permet d'avoir des "points anguleux"
sur le bord $\partial\Omega$ de Ω .

En fait, L^p est définie pour n seulement C^1 . Mais C^1
est trop demander, comme le montre l'exemple des singularités
en $r^{-\alpha}$ ($\alpha \in]0, 1[$) du champ de contrainte dans certains
cas de points anguleux de $\partial\Omega$.

Cherchons donc la classe la plus générale des champs de déplacement pour lesquelles l'énergie potentielle E^p est définie.

$$L^2(\Omega) := \left\{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} u^2(x) dx < \infty \right\}$$

mesurables.

Espace vectoriel normé dont la norme est induite par le produit scalaire:

$$(u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx$$

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \exists v_1, v_2, \dots, v_N \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \right. \\ \left. \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} v_i \varphi \right\}$$

On dit que v_i est la dérivée partielle au sens des distributions de u et on note $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}) \right\}$$

Espace vectoriel normé dont la norme est induite par le produit scalaire:

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx$$

Traces $C^\infty(\Omega)$ dense dans H^1 .

$$CA_0 := \left\{ h \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) ; h|_{\Gamma_0} = 0 \right\} \\ = \left\{ h \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N) ; h|_{\Gamma_0} = 0 \right\} \leftarrow \text{adhérence pour la topologie forte } H^1.$$

Inégalité de Korn. Si Ω est Lipschitzien, et $\text{HP}^{N-1}(\Gamma_0) > 0$
il existe $c_0, C_0 \in \mathbb{R}^+$ tels que:
 $\forall u \in CA_0,$

$$c_0 \|u\|_{H^1}^2 \leq \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \leq C_0 \|u\|_{H^1}^2$$

$\nearrow$
Inégalité de Korn
(difficile).

$\nearrow$
trivialité

Cela montre que $H^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ est la classe la plus générale de champs de déplacement tels que $\int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varepsilon(u) < \infty$

Régularité des données

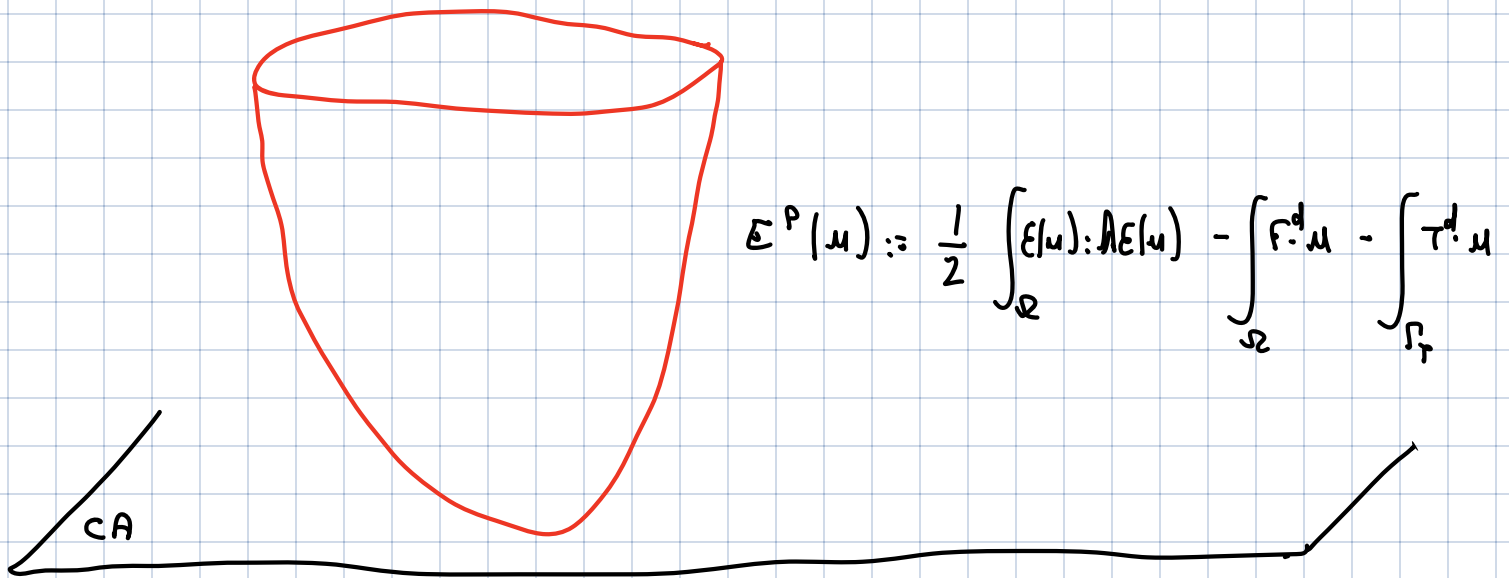
$$F \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

$$\tau \in L^2(\Gamma_T; \mathbb{R}^N)$$

$$U \in H^{1/2}(\Gamma_0; \mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \mid \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) \cdot u(y)|^2}{|x - y|^N} < \infty \right\}$$

$$\text{trace} \begin{cases} H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_0) \\ u \mapsto u|_{\Gamma_0} \end{cases}$$

(continue, surjective. De plus, il existe un isomorphisme $H^1(\Omega) \leftrightarrow H^{1/2}(\Gamma_0)$)



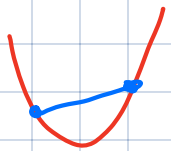
$$CA := \{ u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \mid u|_{\Gamma_U} = U \}$$

$$CA_0 := \{ h \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \mid h|_{\Gamma_U} = 0 \}$$

E^P définie et finie sur CA . dE^P_u définie sur CA_0 .

On a ou :

$$dE^P_u \equiv 0 \iff u \text{ minimiseur de } E^P$$



strict convexité
 $\Rightarrow$ au plus 1 minimiseur

Si $u \neq v$, $\forall \lambda \in]0,1[$

$$E^P(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda E^P(u) + (1-\lambda)E^P(v)$$

(car $u \neq v \Rightarrow 2u \cdot v < u^2 + v^2$)

$$dE^P_u \equiv 0 \iff \forall h \in CA_0 \quad \int_{\Omega} \epsilon(u) \Lambda : \epsilon(h) = \int_{\Omega} f \cdot h + \int_{\Gamma_T} T \cdot h$$

Donc, en particulier avec $h \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$\operatorname{div} \Lambda \epsilon(u) + F = 0 \quad \text{au sens des distributions.}$$

Notons que $\sigma = \Lambda \varepsilon(u)$ est seulement dans L^2 (donc défini presque partout) et n'a donc pas de trace sur le bord $\partial\Omega$.

La formule de Green permet cependant de donner un sens à $\sigma \cdot m$ sur $\partial\Omega$ quand $\operatorname{div} \sigma \in L^2$.

Effet si σ est C^1 , on a :

$$\forall h \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad \int_{\partial\Omega} h \cdot \sigma m = \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(h) + \int_{\Omega} h \cdot \operatorname{div} \sigma$$

Si $\sigma \in L^2(\Omega; M_{\sigma}^{N \times N})$ avec $\operatorname{div} \sigma \in L^2$, alors :

$$h \rightarrow \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(h) + \int_{\Omega} h \cdot \operatorname{div} \sigma$$

est une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$

Comme il existe un isomorphisme

$$i : H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^N)$$

on peut définir σm comme forme linéaire continue sur $H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^N)$ par :

$$\langle \sigma m, h \rangle := \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(i'(h)) + \int_{\Omega} i'(h) \cdot \operatorname{div} \sigma$$

σm est alors un élément du dual $H^{-1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^N)$ de $H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^N)$.

Au final

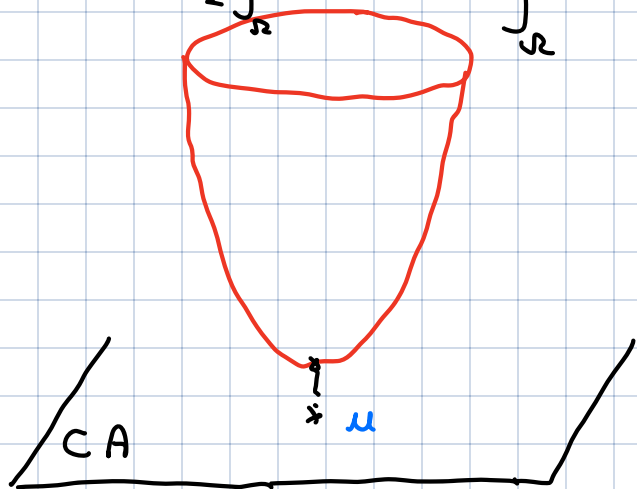
$$u = \arg \min_{v \in CA} E^P(v) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in CA \\ dE^P_u = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega) \text{ et } u|_{\Gamma_0} = U \\ \forall v \in CA_0 \quad \int_{\Omega} \epsilon(u) : \Lambda \epsilon(v) = \int_{\Omega} F \cdot v + \int_{\Gamma_T} T \cdot v \end{array} \right.$$

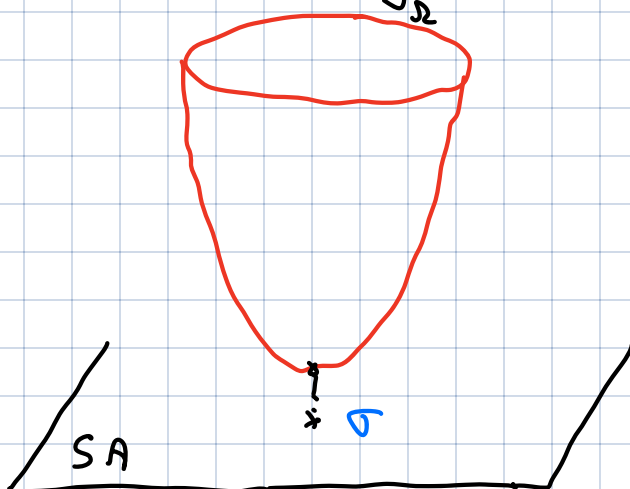
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ et } u|_{\Gamma_0} = U \\ \operatorname{div} \Lambda \epsilon(u) + F = 0 \quad \text{au sens des distributions dans } \Omega \\ \sigma n = T \quad \text{dans } H^{-1/2}(\Gamma_T; \mathbb{R}^N) \end{array} \right.$$

On donne plus facilement un sens précis à la formulation variationnelle
ou à la formulation faible qu'aux équations locales !

$$E^P(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon(u) : \Lambda \epsilon(u) - \int_{\Omega} F \cdot u - \int_{\Gamma_T} T \cdot u$$



$$E^C(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \Lambda^{-1} \sigma - \langle U, \sigma n \rangle_{H^{1/2}, H^{1/2}}$$



$$CA = \{ u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \mid u|_{\Gamma_0} = U \}$$

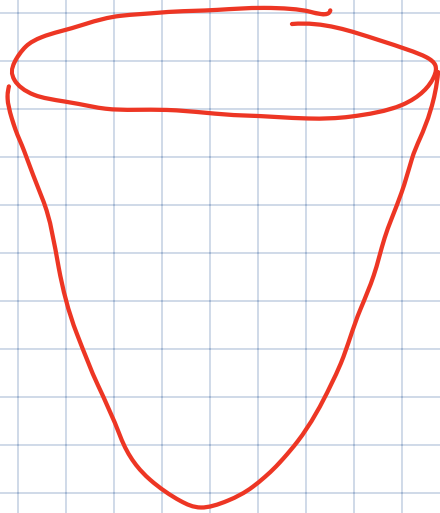
$$SA = \{ \sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{M}_s^{N \times N}) \mid \forall u \in H^1 \text{ tq } u|_{\Gamma_0} = U \\ \int_{\Omega} \sigma : \epsilon(u) = \int_{\Omega} F \cdot u + \int_{\Gamma_T} T \cdot U \}$$

FORMULATION EN CONTRAINTE.

Trouver σ tq :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \sigma + F = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \sigma \cdot n = T \quad \text{sur } \Gamma_T \\ \exists u \quad \Lambda^1 \sigma = E(u) \quad \text{avec } u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \end{array} \right.$$

(compatibilité géométrique)



$$E^c(\sigma) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \Lambda^1 \sigma - \int_{\Gamma_D} U \sigma n$$

$- \langle U, \sigma n \rangle_{H^{1/2}, H^{-1/2}}$

$$SA := \left\{ \sigma \in L^2(\Omega; H_s^{N \times N}) \mid \forall u \in CA_0, \int_{\Omega} \sigma E(u) = \int_{\Omega} F u + \int_{\Gamma_T} T u \right\}$$

$$SA_0 := \left\{ \sigma \in L^2(\Omega; H_s^{N \times N}) \mid \forall u \in CA_0, \int_{\Omega} \sigma E(u) = 0 \right\}$$

$$\text{Si } \mathcal{H}^{N+1}(\Gamma_D) = 0, \quad SA \neq \emptyset \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} F + \int_{\Gamma_T} T = 0 \\ \forall i, j \in \{1, \dots, N\} \quad \int_{\Omega} (x_i F_j - x_j F_i) + \int_{\Gamma_T} (x_i T_j - x_j T_i) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall R \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \Omega \in H^{N \times N}_{\text{antisym}} \\ \int_{\Omega} F \cdot (R + \Omega \cdot x) + \int_{\Gamma_T} T \cdot (R + \Omega \cdot x) = 0 \end{array} \right.$$

$$\forall \eta \in SA_0, \quad E^c(\sigma + \eta) = E^c(\sigma) + \underbrace{\int_{\Omega} \sigma \lambda^T \eta - \langle \lambda^T \eta, n, U^d \rangle}_{dE^c_{\sigma}(\eta)} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta \lambda^T \eta}_{O(\|\eta\|_{L^2}^2)}$$

quand on aura montré l'existence
du minimiseur de E^P

(cela donnera la formulation
faible des conditions de compatibilité
géométriques : CNS)

équations locales $\Leftrightarrow \forall \eta \in SA_0 \quad dE^c_{\sigma}(\eta) = 0$

$\Downarrow$ car E^c est convexe

$$\sigma = \arg \min_{\eta \in SA} E^c(\eta)$$

Terminologie "énergie complémentaire":

$$\begin{aligned} E^P(u) + E^c(\sigma) &= \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(u) - \int_{\Omega} F \cdot u - \int_{\Gamma_T} T \cdot u - \langle \sigma n, U \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

si u minimiseur de E^P et σ minimiseur de E^c .

② Méthode directe du Calcul des Variations

Terminologie.
et notation.

$$\inf_{u \in CA} E^P(u) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

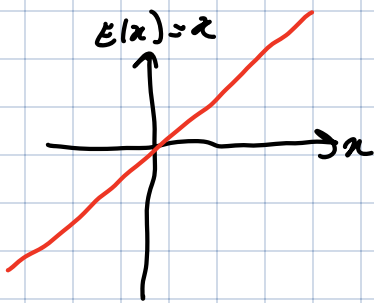
Tout $u \in CA \quad \forall q :$

$$E^P(u) = \inf_{v \in CA} E^P(v) = \min_{v \in CA} E^P(v)$$

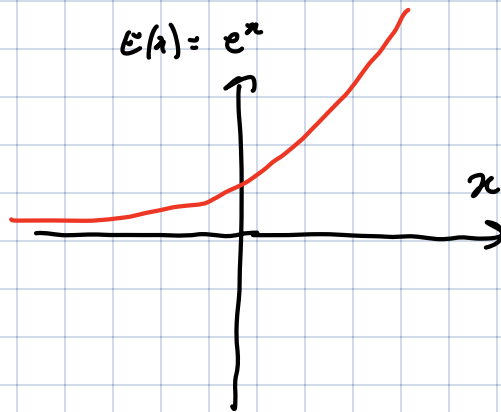
est appelée minimum.

Il n'en existe pas toujours.

Exemples.

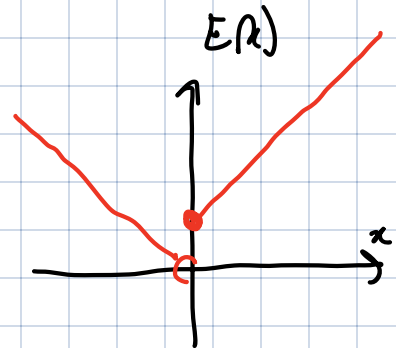


$$\inf_{x \in \mathbb{R}} E(x) = -\infty$$



$$\inf_{x \in \mathbb{R}} E(x) = 0$$

pas atteint.



$$\inf_{x \in \mathbb{R}} E(x) = 0$$

pas atteint.

On verra que la plasticité parfaite fournit des exemples de ces 3 situations.

Pour s'en sortir, un théorème de base :

THEOREME L'image d'un compact par une application continue est un compact.

COROLLAIRE 1 Une application à valeurs réelles, continue sur un compact atteint son minimum et son maximum.

COROLLAIRE 2 Une application à valeurs réelles, semi-continue inférieurement sur un compact a un minimiseur.

Cas d'une fonction de $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{R}^N$, les compacts sont les fermés bornés.

Ils sont caractérisés par le fait que toute suite y possède une sous-suite convergente.

La fonction f est semi-continue inférieurement, resp. continue, si pour toute suite $x_n \rightarrow x$, on a :

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

$$\text{resp. } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

PROPOSITION

Soit F fermé non vide de $\mathbb{R}^N$ et $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ semi-continue inférieurement et tendant vers $+\infty$ à l'infini (on dit coercive).

Alors f a au moins un minimiseur sur F .

Preuve.

Soit $x_0 \in F$. Comme $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\exists R \quad \forall x \quad \|x\| \geq R \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + 1$$

La boule fermée $B(0, R)$ est compacte.

Considérons $\inf_{x \in B(0, R)} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

On peut construire une suite minimisante (x_n) dans $B(0, R)$ telle que:

$$f(x_n) \leq \begin{cases} -n & \text{si } \inf_{B(0, R)} f = -\infty \\ \inf_{B(0, R)} f + \frac{1}{n} & \text{si } \inf_{B(0, R)} f > -\infty \end{cases}$$

On peut alors extraire une sous-suite $(x_{p(n)})$ convergeant vers x_∞ et on a:

$$f(x_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_{p(n)}) = \inf_{B(0, R)} f$$

Ah, mais alors l'inégalité est une égalité

et x_∞ est un minimiseur de f sur F . $\square$

Dans les exemples 1 et 2, c'est la compacité qui est en cause : les suites minimisantes partent à l'infini. Dans l'exemple 3, c'est la semi-continuité inférieure qui est en cause.

1. n'est pas séparable : pas bornée inférieurement.
2. peut l'être car on peut parfois récupérer la compacité manquante en changeant la définition de $\|x\| \rightarrow \infty$.
C'est par exemple ce que fait la relaxation BV.
3. est toujours séparable car le supremum de fonctions s.c.i. est s.c.i. On peut donc changer la définition de l'énergie en la remplaçant par le supremum des minorantes s.c.i. : c'est ce qu'on appelle la relaxation s.c.i.. Ça ne change pas la valeur de l'infimum.

$$\bar{\phi} \text{ relaxation de } \phi \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall x, \forall x_n \rightarrow x \quad \bar{\phi}(x) \leq \liminf_{x_n \rightarrow x} \phi(x_n) \\ \forall x, \exists x_n \rightarrow x \quad \bar{\phi}(x) \geq \limsup_{x_n \rightarrow x} \phi(x_n) \end{array} \right.$$

L'application de la méthode directe à un problème de mécanique consiste en 2 points :

- rechercher (et obtenir) de la compacité
- rechercher (et obtenir) de la semi-continuité inférieure.

On va voir qu'il existe des méthodes pour ça. Leur application essentialise et révèle à chaque fois la phénoménologie propre au problème de mécanique en jeu et permet d'en affiner la formulation.

Quelques définitions classiques de topologie.

- Espaces vectoriels normés, Banach, Hilbert.
- Espaces métriques.
- Topologie : collection de sous-ensembles appelés ouverts, stables par réunion quelconque et intersection finie contenant $\emptyset$ et l'ensemble entier.

Dans un espace métrique, les ouverts sont les ensembles tels que $x \in O \Rightarrow \exists r > 0 \quad B(x, r) \subset O$

Mais, on peut considérer des topologies qui ne sont pas induites par une distance : c'est le cas des topologies faibles. On dit qu'elles ne sont pas métrisables.

On ne peut pas les définir par la définition de convergence des suites.

- Compact: de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

$\Updownarrow$ si topologie métrisable

Toute suite a une sous-suite convergente.

- Continuité: Image réciproque d'un fermé est fermé

$\Downarrow$ (équivalence si topologie métrisable)

$$\text{Pour tout } x_n \rightarrow x \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

- semi-continuité inférieure: pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([-\infty, a])$ est fermé.

$\Downarrow$ (équivalence si topologie métrisable)

$$\text{pour tout } x_n \rightarrow x \quad f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

E Banach. E^* espace des formes linéaires continues
 E^* est un Banach pour $\|f\|^* = \sup_{x \in E, \|x\|=1} |f(x)|$

Si H Hilbert:

$$\left\{ \begin{array}{l} H \rightarrow H^* \\ h \mapsto \left\{ \begin{array}{l} H \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto h \cdot x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est un isomorphisme et toute forme linéaire est représentable à l'aide du produit scalaire avec un élément fixe.

DÉFINITION [TOPOLOGIE FAIBLE D'UN BANACH (OU HILBERT)]

C'est la topologie la moins fine (avec le minimum d'ouverts) pour laquelle toutes les formes linéaires $f \in E^*$ restent quand même continues.

Moins il y a d'ouverts dans la topologie de E , moins il y a d'applications $\mathbb{C} : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues.
En revanche, plus il y a d'ensembles compacts.

Il faut vérifier que la définition ci-dessus a un sens (elle en a un).

Faits principaux concernant la topologie faible

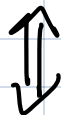
$$\begin{aligned} \bullet \quad x_n \rightarrow x & \iff \forall f \in E^* \quad \overbrace{\langle f, x_n \rangle}^{f(x_n)} \rightarrow \langle f, x \rangle \\ & \iff \forall h \in H \quad h \cdot x_n \rightarrow h \cdot x \quad (\text{cas d'un Hilbert}) \end{aligned}$$

$$\text{Si } x_n \rightarrow x \quad \text{alors } x_n \rightarrow x$$

- Boule unité fermée de E compacte pour la topologie forte



E est de dimension finie



Topologies forte et faible identiques

- Si $x_n \rightarrow x$ alors $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ suite bornée.

$$\text{et } \|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$



conséquence de
Banach-Steinhaus
(difficile)

$\Leftrightarrow$ semi-continuité inférieure faible
de la norme.

(mais pas continuité faible ! Base Hilbertienne (e_i) : $e_i \rightarrow 0$
 $\|e_i\| = 1$)

Plus généralement, si φ est convexe, fortement s.c.i.
alors φ est faiblement s.c.i.

- Tout $e \in E$ définit une forme linéaire continue sur E^* :

$$\begin{cases} E^* \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \langle e, f \rangle \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ injection canonique $J: E \rightarrow E^{**}$.

Si elle est surjective, E^{**} s'identifie à E et on
dit que E est réflexif. C'est le cas de tous les Hilbert.

Boule unité fermée faiblement compacte
 $\Leftrightarrow E$ réflexif.

En particulier, la boule unité fermée d'un espace de Hilbert est toujours compacte pour la topologie faible.

On a donc:

THEOREME { Soit E Banach réflexif (par exemple Hilbert)
 $\psi : A \subset E \rightarrow]-\infty; +\infty]$ convexe, propre,
o.c.i., coercive:
$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow \infty \\ x \in A}} \psi(x) = +\infty$$

Alors ψ a un minimiseur m :
$$\psi(m) = \inf_{x \in A} \psi(x)$$

PREUVE.

Soit x_0 tq $\psi(x_0) < \infty$.

Soit $K = \psi^{-1}(]-\infty; \psi(x_0)])$ qui est
convexe, fermé, borné (donc partie faiblement
fermée d'une partie faiblement compacte) donc
faiblement compacte.

Comme γ est faiblement s.c.i., elle a un minimum. $\square$

COROLLAIRE Les 2 problèmes de minimum de l'élasticité linéarisée ont un minimum unique.

PREUVE Montrons la coercivité.

- Énergie potentielle.

$$\begin{aligned} E^p(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \Lambda \varepsilon(u) - \int_{\Omega} F \cdot u - \int_{\Gamma} T \cdot u \\ &\quad \downarrow \text{KORN} \\ &\geq c_0 \|u\|_{H^1}^2 - \|F\|_{L^2} \cdot \|u\|_{L^2} - \|T\|_{L^2} \cdot \|u\|_{H^{1/2}} \\ &\geq c_0 \|u\|_{H^1}^2 - \left(\|F\|_{L^2} + C \|T\|_{L^2} \right) \|u\|_H \end{aligned}$$

continuité trace
de $H^1 \rightarrow H^{1/2}$

donc $\lim_{\|u\|_{H^1} \rightarrow \infty} E^p(u) = +\infty$

$\|u\|_{H^1} \rightarrow \infty$

$u \in CA$

E^p est coercive.

- Énergie complémentaire.

$$E^c(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \Lambda^{-1} \sigma - \int_{\Gamma_u} U \cdot \sigma \cdot n$$

$\langle U, \sigma n \rangle_{H^{1/2}, H^{1/2}}$

$$\text{or } \sigma \in SA \Rightarrow \int_{\Gamma_U} U \cdot \sigma \cdot n = \int_{\Omega} \sigma : E(\tilde{u}) - \int_{\Omega} F \tilde{u} - \int_{\Gamma_f} T \tilde{u}$$

pour $\tilde{u}$ choisi arbitrairement dans CA .

$$\text{Donc. } \left| \int_{\Gamma_U} U \cdot \sigma \cdot n \right| \leq C_1 \|\sigma\|_{L^2} + C_2$$

$$\text{Donc } E^c(\sigma) \geq C_0 \|\sigma\|_{L^2}^2 - C_1 \|\sigma\|_{L^2} - C_2$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{\|\sigma\|_{L^2} \rightarrow \infty \\ \sigma \in SA}} E^c(\sigma) = +\infty$$

□

En fait, comme $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ sont séparables ($\exists$ partie mesurable dense), $\bar{B}$ est métrisable, donc on peut faire la même démonstration que dans le cas $\mathbb{R}^N$, en remplaçant la convergence des suites par la convergence faible $\rightharpoonup$.

Cas d'un espace non réflexif.

Dans ce cas, il existe toujours des suites bornées dont on ne peut pas extraire de suite faiblement convergente.

Il y a un cas où on peut quand même s'en sortir, c'est le cas du dual B^* d'un espace séparable (qui possède une partie dénombrable dense).

Tout $\ell \in B$ définit une forme linéaire f_ℓ sur B^* par :

$$\forall \varphi \in B^*, \quad f_\ell(\varphi) := \langle \varphi, \ell \rangle$$

Comme B^* n'est pas réflexif, on ne décrit pas toutes les formes linéaires continues sur B^* de cette manière.

La topologie faible étoilée est alors définie comme la topologie la moins fine pour laquelle toutes les f_ℓ pour $\ell \in B$ sont continues.

Si B^* n'est pas réflexif, cette topologie est toujours plus faible (moins fine) que la topologie faible.

THEOREME 1 { La boule unité fermée d'un dual est toujours compacte pour la topologie faible étoilée.

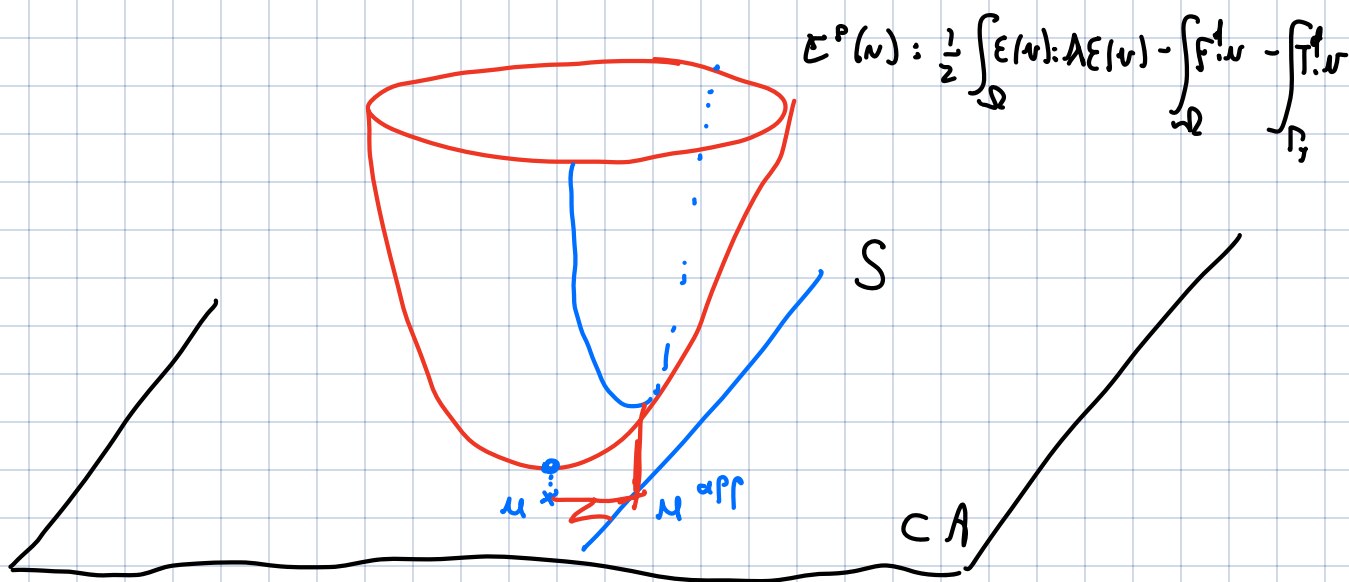
THEOREME 2 { Si l'espace B dont B^* est le dual, est séparable, alors la boule unité de B^* est métrisable, ce qui implique que, de toute suite bornée dans B^* , on peut

extraire une suite convergente pour la topologie faible étoilée, c'est-à-dire :

$$\forall \mu \in B \quad \langle f_{\varphi(\mu)}, \mu \rangle \rightarrow \langle f, \mu \rangle$$

APPLICATION 1

APPROXIMATION NUMÉRIQUE ET ESTIMATION D'ERREUR.



$$E^P(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon(u) : A \epsilon(u) - \int_{\Omega} F^t \cdot u - \int_{\Gamma_f} f^t \cdot u$$

S sous-espace affine de dimension finie de CA.

$$u^{app} = \arg \min_{u \in S} E^P(u)$$

$$= \arg \min_{u \in S} \int_{\Omega} \epsilon(u-v) : A \epsilon(u-v)$$

↑
norme équivalente
à la norme H^1 .

u^{app} est la projection $\perp$ de la solution exacte u sur S ,

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u - u^{app}) : \lambda \varepsilon(u - u^{app}) = 2 \left[\mathcal{E}^P(u^{app}) - \mathcal{E}^P(u) \right]$$

$$\text{car } \mathcal{E}^P(u) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \lambda \varepsilon(u)$$

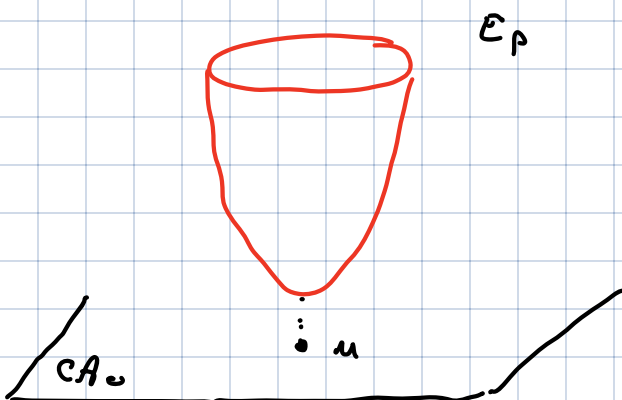
mais $\mathcal{E}^P(u)$ inconnue.

$$\forall \tilde{\sigma} \in SA, \quad \mathcal{E}^c(\tilde{\sigma}) \geq \mathcal{E}^c(\sigma) = -\mathcal{E}^P(u)$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u - u^{app}) : \lambda \varepsilon(u - u^{app}) \leq 2 \left[\mathcal{E}^P(u^{app}) + \mathcal{E}^c(\tilde{\sigma}) \right]$$

Convergence forte dans $H^1(\Omega)$ des approximations éléments finis vers solution exacte quand on raffine le maillage.

APPLICATION 2



Supposons $U = 0$

Comme le problème d'élasticité est linéaire, si on multiplie (F, T) par d , on multiplie la solution par d .

Cela signifie que :

$$\min_{u \in CA_0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \mathbb{M} \varepsilon(u) - \int_{\Omega} \mathbb{M} F \cdot u - \int_{\Gamma_T} \mathbb{M} T \cdot u = -\frac{1}{2} S \mathbb{M}^2$$

Donc la valeur du minimum s'interprète comme une souplesse globale de la structure (au facteur $\frac{1}{2}$ près), dont l'inverse est la raideur globale.

Le problème de l'optimisation de forme consiste à disposer de manière optimale dans l'espace un volume donné de matière élastique, disons isotrope, de manière à maximiser la raideur globale (minimiser la souplesse), pour un jeu d'effort extérieur donné, disons $T \in L^2(\Gamma_T; \mathbb{R}^N)$.

Il s'agit de minimiser l'opposé de la valeur du minimum de l'énergie potentielle totale rapport à :

$$\mathbb{M}(x) = \mathbb{M} \cdot \chi_{\Omega}(x)$$

où :

$$\chi_{\Omega}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

en considérant tous les Ω de volume donné $|\Omega| = V$.

Ce problème de minimisation a un défaut de semi-continuité inférieure. Les suites minimisantes organisent des bulles de vide de plus en plus finement de sorte à fabriquer de la matière élastique anisotrope au sens de l'homogénéisation.

Le problème doit être relaxé pour avoir des solutions.

C'est un exemple du phénomène que l'on appelle oscillation des suites minimisantes. Le problème de minimum en déplacement / déformation posé par la plasticité de Hencky fait apparaître un phénomène différent de localisation sur des "hypersurfaces" que l'on appelle phénomène de concentration des suites minimisantes.